αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1 ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ (σελ 65)

A_2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ (σελ 87)

A_3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ (σελ 27)

A_4. α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΛΑΘΟΣ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3\cdot x + 1, \ x \in \mathbb{R}$

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = x^2 - 2x - 3, \ x \in \mathbb{R}$

Β2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$, $\Delta = 4 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 16$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

Επομένως ισχύει ο πίνακας

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Μ.		Τ.Ε		

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[3, +\infty)$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 3]$

• Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-1$ το
$f(-1)=\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-(-1)^2-3\cdot(-1)+1=-\frac{1}{3}-1+3+1=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

• Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=3$ το
$f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-3\cdot 3+1=\cancel{9}-\cancel{9}-9+1=-8$

Β3. Η εξίσωση εφαπτομένης θα είναι της μορφής
$y=\lambda\cdot x+b$, με $\lambda, b\in\mathbb{R}$
$\lambda=f'(0)=-3$, άρα $y=-3\cdot x+b$ (ε)
Επειδή η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(0,f(0))$
θα ισχύει: $f(0)=-3\cdot 0+b \Leftrightarrow 1=b$
Τελικά, η εξίσωση της ε είναι: $y=-3\cdot x+1$

Β4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f'(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-2\cdot x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-3)\cdot\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}(x-3)=-1-3=-4$

ΘΕΜΑ Γ

Ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν οι επτά μαθητές είναι:

$$4, 5, 4, \kappa, 0, 3, 7$$

Γ1. Ο μέσος αριθμός βιβλίων είναι:

$$\bar{x} = \frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7} = \frac{23+\kappa}{7}$$

Έχουμε: $\bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{23+\kappa}{7} = 4 \Leftrightarrow 23+\kappa = 28 \Leftrightarrow \kappa = 5$

Οπότε, οι αριθμοί των βιβλίων που διάβασαν οι επτά μαθητές διατάσσονται ως εξής:

$$0, 3, 4, 4, 5, 5, 7$$

Γ2. Όπως φαίνεται από το προηγούμενο ερώτημα, η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή $\delta = 4$

Γ3. $$s^2 = \frac{(0-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2}{7}$$

$$= \frac{16+1+0+0+1+1+9}{7} = \frac{28}{7} = 4$$, οπότε $s^2 = 4$

αξία
ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Γ4. Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι:

$CV = \frac{s}{\bar{x}}$, όμως $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$ και $\bar{x} = 4$

Άρα, $CV = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}50$ ή $50\% \geq 10\%$

Επομένως, το δείγμα είναι ανομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν οι πλευρές του ορθογωνίου είναι $x, y > 0$, τότε το εμβαδόν του είναι:

$E = x \cdot y \Leftrightarrow x \cdot y = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$, $x > 0$

Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι

$$\Pi = 2 \cdot x + 2 \cdot y = 2 \cdot x + 2 \cdot \frac{100}{x}$$

Άρα, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$\Pi(x) = 2 \cdot x + \frac{200}{x}, \quad x > 0$$

Δ2. Η συνάρτηση Π είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με: $\Pi'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2}$

Άρα, $\Pi'(x) = \frac{2}{x^2}(x+10) \cdot (x-10)$, $x > 0$

Επειδή για $x > 0$ έχουμε $\frac{2}{x^2}(x+10) > 0$,

η $\Pi'(x)$ είναι ομόσημη με το παράγοντα $x - 10$

Ισχύει ο πίνακας:

x	0		10		$+\infty$
$\Pi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\Pi(x)$	‖	↘	Ελαχ	↗	

- Η Π είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,10]$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $[10,+\infty)$
- Η Π παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=10$ το $\Pi(10) = 2\cdot 10 + \frac{200}{10} = 20+20 = 40$
- Όταν το ορθογώνιο έχει τη μικρότερη περίμετρο το $x_0=10$ και $y_0 = \frac{100}{x_0} = \frac{100}{10} = 10$, επομένως το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Δ3. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (0,10)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

- $x_1 < x_2 \xRightarrow[(0,10)]{\Pi \downarrow} \Pi(x_1) > \Pi(x_2) \Longrightarrow \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0 \quad (1)$

- $x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1 - x_2 < 0 \quad (2)$

Από (1), (2) έχουμε: $A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

Δ4. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x}-10} = \lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\frac{2}{x^2}\cdot(x+10)\cdot(x-10)\cdot(\sqrt{10\cdot x}+10)}{(\sqrt{10\cdot x}-10)\cdot(\sqrt{10\cdot x}+10)}$

$= \lim\limits_{x\to 10} \dfrac{2\cdot(x+10)\cdot(x-10)\cdot(\sqrt{10x}+10)}{x^2\cdot[(\sqrt{10\cdot x})^2-10^2]}$

$= \lim\limits_{x\to 10} \dfrac{2\cdot(x+10)\cdot(x-10)\cdot(\sqrt{10\cdot x}+10)}{x^2\,(10\cdot x-100)}$

$= \lim\limits_{x\to 10} \dfrac{2\,(x+10)\,\cancel{(x-10)}\,(\sqrt{10\cdot x}+10)}{x^2\,10\cdot\cancel{(x-10)}}$

$= \lim\limits_{x\to 10} \dfrac{2\cdot(x+10)\cdot(\sqrt{10\cdot x}+10)}{10\cdot x^2}$

$= \dfrac{2\cdot 20\cdot 20}{10\cdot 100} = \dfrac{80\cancel{0}}{100\cancel{0}} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$