ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ
5ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ 25-26 $(\star)$

Το κριτήριο αφορά το σύνολο της ύλης

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ’ ένα διάστημα Δ και η F είναι μια **παράγουσα** της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $\boldsymbol{G(x)=F(x)+c},\ \boldsymbol{c\epsilon}\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ
- κάθε άλλη παράγουσα $\boldsymbol{G}$ της $\boldsymbol{f}$ στο Δ παίρνει τη μορφή

$$\boldsymbol{G(x)=F(x)+c},\qquad \boldsymbol{c\epsilon}\mathbb{R}$$

(Μονάδες 6)

Α2. Να διατυπώσετε το **θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.**

(Μονάδες 3)

Α3. Να διατυπώσετε το **θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού .**

(Μονάδες 4)

Α4. Να δώσετε ένα παράδειγμα συνάρτησης $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που **είναι 1-1** αλλά **δεν** είναι γνήσια μονότονη στο $\mathbb{R}$ και να κάνετε τη γραφική παράστασή της.

(Μονάδες 4)

Α5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα Δ έχει μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό. **Σ Λ**

β) Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{x_o})$ και **δεν** ορίζεται σε διάστημα $(\boldsymbol{x_o},\boldsymbol{\beta})$, τότε $\boldsymbol{lim_{x\to x_o}f(x)=lim_{x\to x_o^-}f(x)}$. **Σ Λ**

γ) Αν η συνάρτηση f είναι ρητή και ο βαθμός του αριθμητή είναι τουλάχιστον δύο μονάδες μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή, τότε η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες. **Σ Λ**

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και

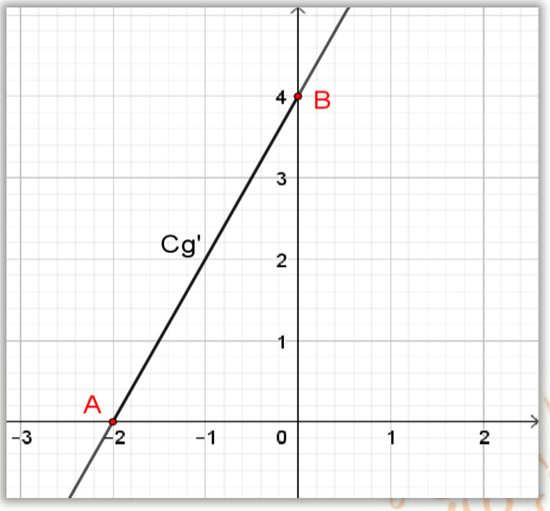
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0,$$

τότε $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\epsilon[\alpha,\beta]$. **Σ Λ**

(Μονάδες 2x4)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της **παραγώγου** $\boldsymbol{g'}$ μιας συνάρτησης $\boldsymbol{g}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει τιμή $\boldsymbol{g(0) = 8}$.



Β1. Να βρείτε την $\boldsymbol{g'}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι

$$\boldsymbol{g(x) = x^2 + 4x + 8, \qquad x \epsilon \mathbb{R}}$$

(Μονάδες 5)

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ με τύπο:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}}$$

Β2. Να μελετήσετε την $\boldsymbol{f}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

Β3. Να μελετήσετε την $\boldsymbol{f}$ ως προς την κυρτότητα. Έχει η $\boldsymbol{C_f}$ σημεία καμπής;

(Μονάδες 4)

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $\boldsymbol{C_f}$.

(Μονάδες 4)

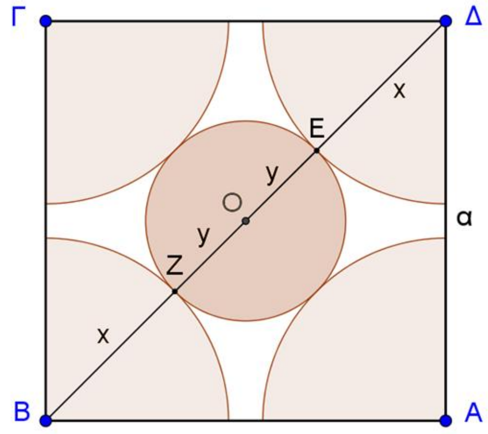
Β5.(i) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(ii) Αν τα x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f και K το σημείο τομής των ασύμπτωτων να δείξετε ότι τα $A(x_1, f(x_1)), K, B(x_2, f(x_2))$ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 4+3)

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ , πλευράς $\alpha = 2\sqrt{2}$, κατασκευάζουμε 4 τεταρτοκύκλια με κέντρα τις κορυφές του και ακτίνα x και ένα κύκλο ακτίνας y που εφάπτεται σε αυτά. Θεωρήστε δεδομένο ότι το κέντρο του κύκλου ταυτίζεται με το κέντρο του τετραγώνου.



Γ1. Να δείξετε ότι:

$$x + y = 2 \quad \text{και} \quad 2 - \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

(Μονάδες 2+3)

Γ2. i) Να δείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν που καταλαμβάνουν τα τεταρτοκύκλια και ο κύκλος δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = 2\pi[x^2 - 2x + 2] \;,\;\; 2 - \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

ii) Να δείξετε ότι όταν το E γίνεται ελάχιστο τότε το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των 4 τεταρτοκυκλίων.

iii) Αν E_{max} , E_{min} είναι αντιστοίχως **η μέγιστη** και **η ελάχιστη** τιμή του εμβαδού E, τότε να δείξετε ότι

$$\frac{E_{max}}{E_{min}} < \frac{6}{5}$$

(Μονάδες 3+4+4)

Γ3. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta x^2 + \sigma\upsilon\nu(\pi x)\,, & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{E(x)}{2\pi} - 1 \,, & 1 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \;,\;\; \mu\varepsilon\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να ικανοποιεί τις υποθέσεις του **Θεωρήματος Μέσης Τιμής** στο διάστημα $[0, \sqrt{2}\ ]$.

(Μονάδες 5)

β) Αν το σημείο $M(x, y)$, με $1 \leq x \leq \sqrt{2}$, κινείται στην C_f και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό $x'(t) > 0$, να βρείτε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία:

$$y'(t_0) = x'(t_0)$$

(Μονάδες 4)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που έχουν συνεχή παράγωγο, ισχύουν τα εξής:

- $\boldsymbol{f(1) = 1}$,
- $\boldsymbol{f'(1) = 0}$
- $\boldsymbol{f}$ **κυρτή στο** $\mathbb{R}$
- $\boldsymbol{f(x) - 1 \geq (x-1) \cdot (g(0) - 1)}$, **για κάθε** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{g(x) \neq 0}$, **για κάθε** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{\kappa\alpha\iota \ \int_{g(0)}^{g(1)} f(x)\, dx = g(0) - 1}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η $\boldsymbol{f}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση 1 **.**

(Μονάδες 5)

Δ2. α) Να δείξετε ότι $\boldsymbol{g(0) = 1}$

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{g}$ **δεν είναι 1-1** και έχει τουλάχιστον ένα **κρίσιμο σημείο.**

(Μονάδες 5+5)

Δ3. Να δείξετε ότι $\boldsymbol{f'(x)(x-1) + 1 \geq f(x)}$, για κάθε $\boldsymbol{x \geq 1}$

(Μονάδες 5)

Αν επιπλέον οι συναρτήσεις $\boldsymbol{F, G}$ είναι παράγουσες των $\boldsymbol{f, g}$ αντιστοίχως, τότε

Δ4. Να δείξετε ότι η **εξίσωση:**

$$\boldsymbol{(x-1)\big(G(x) - G(1)\big) + (x-2)\left(F(x) - F(2) + \frac{1 + f(2)}{2}\right) = 0}$$

έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $\boldsymbol{(1, 2)}$.

(Μονάδες 5)

Καλή Επιτυχία !