

Το κριτήριο αφορά το σύνολο της ύλης

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** σε όλο το Δ .

(Μονάδες 6)

A2. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$;

(Μονάδες 3)

A3. Να διατυπώσετε το **Θεώρημα Fermat**.

(Μονάδες 4)

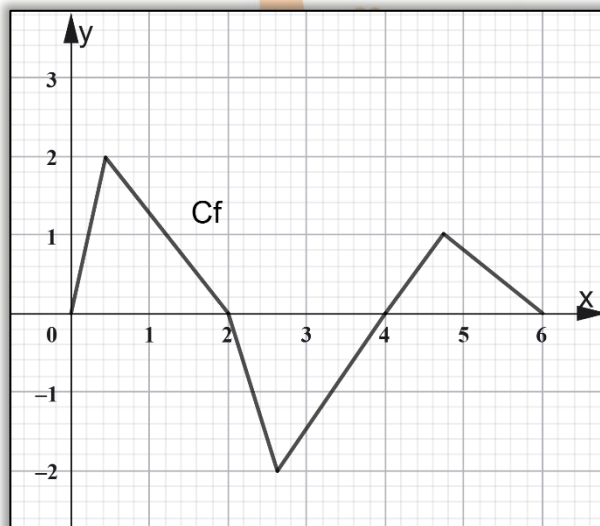
A4. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας **συνεχούς** συνάρτησης f . Να μεταφέρετε τις παρακάτω ισότητες στο τετράδιό σας και να τις συμπληρώσετε **χωρίς να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f** .

$$\int_0^2 f(x) dx =$$

$$\int_2^4 f(x) dx =$$

$$\int_0^6 f(x) dx =$$

$$\int_0^6 |f(x)| dx =$$



(Μονάδες 4)

A5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε ισχύει

$$f(f^{-1}(x)) = x, \text{ για κάθε } x \in A$$

Σ Λ

β) Κάθε συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα που ορίζουν δυο διαδοχικές ρίζες της. Σ Λ

γ) Αν $f(x) > 0$, κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\ell \geq 0$. Σ Λ

δ) Αν η συνάρτηση f είναι **κοίλη** στο διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο του Δ είναι κάτω από την C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Σ Λ

(Μονάδες 2x4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$g(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right), \quad x > 1 \quad \text{και} \quad h(x) = e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

B1. Να βρείτε την **σύνθεση της h με την g** .

$$\text{Αν } f(x) = (goh)(x) = \ln(e^x + 1) - x, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ τότε:}$$

(Μονάδες 4)

B2. Να βρείτε την **μονοτονία και την κυρτότητα της f** .

(Μονάδες 5)

B3. Να βρείτε τις **ασύμπτωτες της C_f** .

(Μονάδες 6)

B4. Να **χαράξετε** την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

B5. Να δείξετε ότι τύπος της f γράφεται $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την **αντίστροφη συνάρτηση της f** .

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Για την δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύουν τα εξής:

* $x^2 f''(x) + 2x f'(x) = 2x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

* $\int_1^2 \frac{x^2 f'(x) - x^2}{x+1} dx = \ln \frac{2}{3}$

* η C_f **διέρχεται** από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Γ1. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $k(x) = x^2 f'(x) - x^2$, $x > 0$, είναι **σταθερή** και να βρείτε την τιμή της.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - 1, \quad x \in (0, +\infty)$$

(Μονάδες 4)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα .

(Μονάδες 4+2)

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση:

$$g(x) = xf(x) - \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Γ3. α) Να μελετήσετε την κυρτότητα της g και να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο καμπής.

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$g\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 2f(x) - 3$$

(Μονάδες 3+3)

Γ4. Να βρείτε το **εμβαδόν** του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , την **εφαπτομένη** ε της C_f στο σημείο $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Για την συνάρτηση $f(x) = ax + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $a \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$e^{f(x)-1} - x \geq \sqrt{x^2 + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η $f'(0) = 1$ και ότι $a = 1$.

(Μονάδες 5)

Δ2. Να δείξετε ότι η C_f είναι **πάνω** από τον άξονα $x'x$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 2+3)

Δ3. Αν η F είναι μια αρχική της f με $F(0) = 2$, τότε:

α) Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - f(x) - 1}{1 - \sin x}$$

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{F(x^2) + F(-x^2)}{2} = 2$$

(Μονάδες 5)

Δ4. Να δείξετε ότι

$$\int_0^1 x \cdot \ln(1 + f(x)) dx < \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(Μονάδες 5)

Καλή Ειπαυχία !

(*) Το παρόν κριτήριο εξέτασης συντάχθηκε από την ομάδα διδασκόντων του Τομέα Μαθηματικών του Φροντιστηρίου αξία και αποτελεί πνευματική τους ιδιοκτησία. Η χρήση του εκτός Φροντιστηρίου, επιτρέπεται μόνο για εκπαιδευτικούς σκοπούς. Οποιαδήποτε άλλη χρήση ή αναπαραγωγή χωρίς άδεια, μπορεί να επιφέρει τις προβλεπόμενες από το Νόμο κυρώσεις.