ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

4ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ***Σχολικό βιβλίο, σελίδα 135 .***

Α2. ***Σχολικό βιβλίο, σελίδα 104 .***

Α3. ***Σχολικό βιβλίο, σελίδα 142 .***

Α4.

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 2\,, \qquad \int_2^4 f(x)\,dx = -2\,,$$

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx = 2 - 2 + 1 = 1$$

$$\int_0^6 |f(x)|\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx = 2 + 2 + 1 = 5$$

Α5. α=Λ, β=Λ, γ=Σ, δ=Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$g(x) = ln\left(\frac{x}{x-1}\right),\;\; x \in (1, +\infty) = D_g \;\; και \;\; h(x) = e^x + 1\,,\;\; x \in \mathbb{R} = D_h$$

$$D_{goh} = \{x \in D_h \mid h(x) \in D_g\}$$

Άρα η goh *ορίζεται όταν:*

$$x \in \mathbb{R} \text{ και } h(x) \in (1, +\infty) \;\Leftrightarrow$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x + 1 > 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x > 0, \textit{που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως $D_{goh} = \mathbb{R}$ *και ο τύπος της* goh *είναι:*

$$(goh)(x) = g\big(h(x)\big) = g(e^x + 1) = ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x + 1 - 1}\right) = ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) =$$

$$= \boldsymbol{ln(e^x+1) - lne^x = ln(e^x+1) - x}$$

τελικά

$$\boxed{\boldsymbol{(goh)(x) = ln(e^x+1) - x\,,\ \ x \in \mathbb{R}}}$$

B2. $\boldsymbol{f(x) = ln(e^x+1) - x\,,\ x \in \mathbb{R}}$

Η $\boldsymbol{f}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *ως σύνθεση και πράξεις παρ/μων συναρτήσεων, με:*

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x+1}} - 1 = -\frac{1}{\boldsymbol{e^x+1}} < \boldsymbol{0}, \textit{για κάθε } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

Επομένως η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ *είναι* ***γνησίως φθίνουσα*** *στο* $\mathbb{R}$.

Η $\boldsymbol{f'}$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$*, με*

$$\boldsymbol{f''(x)} = \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{(e^x+1)^2}} > \boldsymbol{0}, \textit{για κάθε } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

Επομένως η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ *είναι* ***κυρτή*** *στο* $\mathbb{R}$.

B3. *Η συνάρτηση* $\boldsymbol{f}$ *έχει πεδίο ορισμού το* $\mathbb{R}$ *και είναι* ***συνεχής*** *σ' αυτό, ως παρ/μη. Επομένως η* C_f *δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Αναζητούμε ασύμπτωτες στα άκρα του* $\mathbb{R}$.

Στο -∞ έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \cdots = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot ln(e^x+1)\ -1\right) = \ 0 - 1 = -1$$

Διότι:

- *Στο όριο* $\lim\limits_{x\to-\infty} ln(e^x+1)$ *θέτουμε* $\boldsymbol{u = e^x+1}$ *με* $\boldsymbol{u_0} = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1) = 0+1 = \boldsymbol{1}$*, οπότε* $\lim\limits_{x\to-\infty} ln(e^x+1) = \lim\limits_{u\to1} ln\,(u) = ln1 = \boldsymbol{0} \qquad (\star)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}(1/x) = 0$

Επιπλέον

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (-1)x]\ = \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} ln(e^x+1) \overset{(\star)}{=} 0$$

Επομένως η ευθεία $\boldsymbol{y = -x}$ ***είναι πλάγια ασύμπτωτη της*** $\boldsymbol{C_f}$ ***στο*** $\boldsymbol{-\infty}$.

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln(e^x+1)-x) = \lim_{x\to\mp\infty}(\ln(e^x+1)-\ln e^x) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

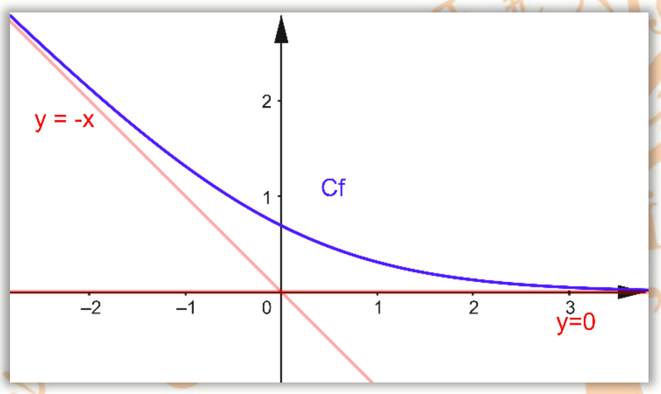
Για να υπολογίσουμε το παραπάνω όριο, θέτουμε $u=\frac{e^x+1}{e^x}$ *, οπότε*

$$u_0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x} \overset{\infty/\infty}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to1}\ln(u) = \ln1 = 0,$$

Επομένως η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας x'x, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και οι ασύμπτωτές της φαίνονται στο σχήμα.*



B5. *Έχουμε:*

$$f(x) = \ln(e^x+1)-x = \ln(e^x+1)-\ln e^x = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right) = \ln(1+e^{-x})$$

Άρα $f(x) = \ln(e^{-x}+1)$, $x\in\mathbb{R}$

*Η **f** είναι **γνησίως φθίνουσα** άρα είναι **1-1** και **αντιστρέφεται.***

Θέτουμε $f(x)=y$, με $x\in\mathbb{R}$ και έχουμε:

$$\begin{cases}\ln(e^{-x}+1)=y\\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e^{-x}+1=e^y\\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e^{-x}=e^y-1\\ x\in\mathbb{R},\end{cases}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^{-x}>0 \Leftrightarrow e^y-1>0 \Leftrightarrow e^y>1 \Leftrightarrow e^y>e^0 \Leftrightarrow y>0$ και το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases}e^{-x}=e^y-1\\ x\in\mathbb{R}, y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x=\ln(e^y-1)\\ y>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\ln(e^y-1)\\ y>0\end{cases}$$

Άρα $f^{-1}(y) = -ln(e^y - 1), y > 0$

Τελικά:

$$\boxed{f^{-1}(x) = -ln(e^x - 1)\,,\quad x > 0}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.α) *Δίνεται ότι:*

- $x^2 f''(x) + 2xf'(x) = 2x\ ,\ x \in (0, +\infty) \quad (1)$
- $k(x) = x^2 f'(x) - x^2 \quad , \quad x \in (0, +\infty) \quad (2)$

Η συνάρτηση k *είναι* ***παραγωγίσιμη*** *στο* $(0, +\infty)$ *ως πράξεις παρ/μων, με*

$$k'(x) = 2xf'(x) + x^2 f''(x) - 2x \overset{(1)}{=} 2x - 2x = 0\,,\quad x \in (0, +\infty)$$

Επομένως, από τις συνέπειες του ΘΜΤ, η ***k είναι σταθερή*** *άρα υπάρχει* $c \in \mathbb{R}$*, ώστε:*

$$k(x) = c\,,\quad x \in (0, +\infty) \qquad (3)$$

Από τα δεδομένα έχουμε:

$$\int_1^2 \frac{x^2 f'(x) - x^2}{x+1}dx = ln\frac{2}{3} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \int_1^2 \frac{k(x)}{x+1}dx = ln\frac{2}{3} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \int_1^2 \frac{c}{x+1}dx = ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c \cdot [ln(x+1)]_1^2 = ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow c \cdot (ln3 - ln2) = ln2 - ln3 \Leftrightarrow c = -1$$

Τελικά

$$k(x) = -1,\quad x \in (0, +\infty)$$

Γ1.β) *Για κάθε* $x \in (0, +\infty)$*, έχουμε:*

$$k(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 f'(x) - x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 f'(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)'\ ,\quad x \in (0, +\infty)$$

Από τις συνέπειες του ΘΜΤ, ***υπάρχει*** $c_1 \in \mathbb{R}$*, ώστε:*

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + c_1\ ,\quad x \in (0, +\infty)$$

Το σημείο $\boldsymbol{A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$ *ανήκει στην* $\boldsymbol{C_f \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}+2+c_1=\frac{3}{2} \Leftrightarrow c_1=-1}$

Τελικά:

$$\boldsymbol{f(x)=x+\frac{1}{x}-1 \ \ , \ \ x\in(0,+\infty)}$$

Γ2. *Είναι*

$$\boldsymbol{f'(x)=1-\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2} \ \ , \ \ x\in(0,+\infty)}$$

Άρα για $\boldsymbol{x\in(0,+\infty)}$***, ισχύουν τα εξής:***

- $\boldsymbol{f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1}$
- $\boldsymbol{f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow x>1}$
- $\boldsymbol{f'(x)<0 \Leftrightarrow x^2-1<0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow 0<x<1}$

x	$-\infty$ 0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f		↘		↗
			min	

Επιπλέον η f είναι συνεχής στο 1, επομένως:

Η $\boldsymbol{f}$ *είναι* ***γνησίως φθίνουσα στο*** $(0,1]$ ***, γνησίως αύξουσα στο*** $[1,+\infty)$ ***και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο*** $\boldsymbol{1}$ ***, το*** $\boldsymbol{f(1)=1}$.

Τέλος, η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, με:

$$\boldsymbol{f''(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'=0+\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}>0 \ , \ \ x\in(0,+\infty)}$$

Άρα η $\boldsymbol{f}$ ***είναι κυρτή στο*** $\boldsymbol{(0,+\infty)}$.

Γ3.α) *Είναι*

$$\boldsymbol{g(x)=x\left(x+\frac{1}{x}-1\right)-\frac{1}{x}=x^2+1-x-\frac{1}{x} \ , \ \ x>0}$$

Η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, με:

$$g'(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x^2}\ , \quad x > 0$$

$$g''(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3-1)}{x^3}\ , \quad x > 0$$

Άρα για $x \in (0, +\infty)$, ισχύουν τα εξής:

- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$
- $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 > 1 \Leftrightarrow x > 1$
- $g''(x) < 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^3 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Εφόσον η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Η g είναι ***κοίλη στο $(0, 1]$, κυρτή στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο 1.***

Αφού $g(1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$, ***το σημείο καμπής της C_g είναι το $\Sigma(1, 0)$.***

Η εφαπτομένη ζ της C_g στο σημείο καμπής έχει εξίσωση:

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1)$$

Αφού $g(1) = 0$ και $g'(1) = 2 - 1 + 1 = 2$, ***η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:***

$$y = 2x - 2 \qquad (\zeta)$$

Γ3.β) **Η εξίσωση**

$$g\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 2f(x) - 3 \qquad (I)$$

ορίζεται όταν:

$$x \in D_f \ \ \kappa\alpha\iota \ \ f(x) - \frac{1}{2} \in D_g \ \Leftrightarrow$$

$$x > 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ f(x) - \frac{1}{2} > 0 \ \Leftrightarrow x > 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ f(x) > \frac{1}{2}$$

Όμως, από το ***Γ2,*** *έχουμε $f(x) \geq 1 > 1/2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.*

Άρα η εξίσωση ορίζεται στο $(0, +\infty)$.

Για $x \in (0, +\infty)$, ***θέτουμε $u = f(x) - 1/2 \Leftrightarrow f(x) = u + 1/2$, και η (I) γράφεται:***

$$g(u) = 2\left(u + \frac{1}{2}\right) - 3 \Leftrightarrow g(u) = 2u - 2 \quad (II)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ***οι λύσεις της*** (II) ***είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της*** C_g ***με την εφαπτομένη*** ζ.

Από το ***Γ3α,*** *γνωρίζουμε ότι* ***η*** g ***είναι κοίλη στο*** $(0, 1]$ ***και κυρτή στο*** $[1, +\infty)$.

Άρα η C_g ***είναι κάτω από την εφαπτομένη*** ζ ***στο*** $(0, 1]$***, με εξαίρεση το Σ και πάνω από την*** ζ ***στο*** $[1, +\infty)$***, με εξαίρεση το Σ. Επομένως, μοναδικό κοινό σημείο των*** C_g ***και*** ζ ***είναι το σημείο επαφής Σ. Άρα η*** (II) ***έχει μοναδική λύση το*** $u = 1$.

Άρα έχουμε:

$$u = 1 \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Η τελευταία έχει ***διακρίνουσα*** $\Delta = 25 - 16 = 9$ ***και λύσεις***

$$x = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = \frac{1}{2}$$

που και οι δυο είναι δεκτές.

Γ4. *Η εφαπτομένη* ***ε*** *της* C_f *στο σημείο* $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ *έχει εξίσωση:*

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

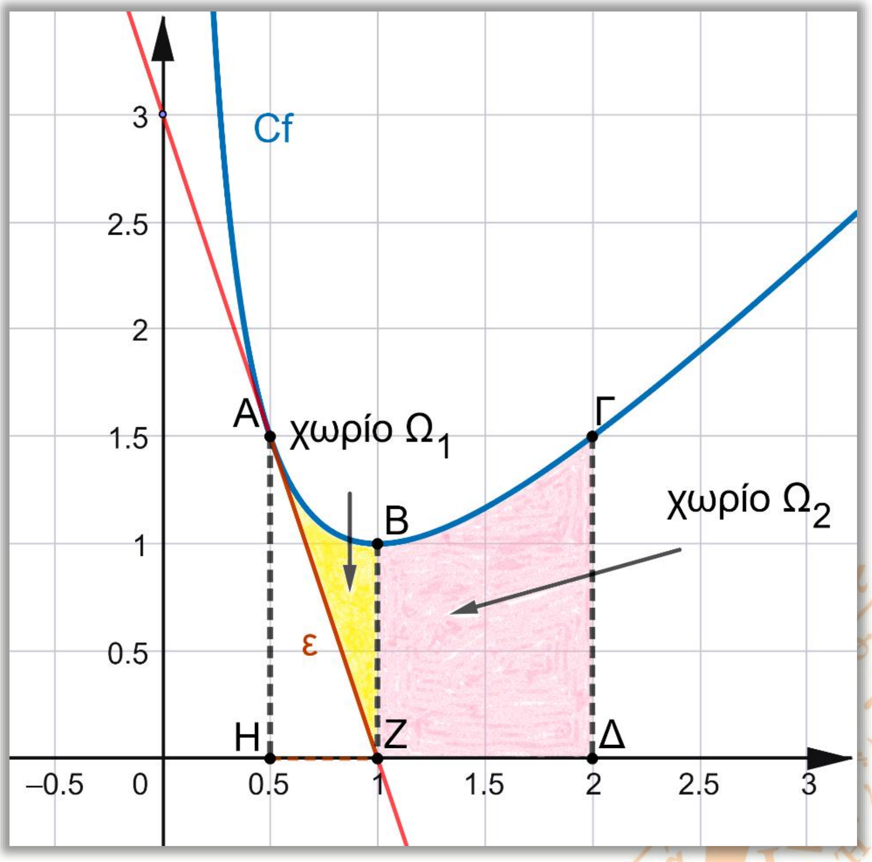
αφού $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ *και* $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 4 = -3$***, η εξίσωση της ε γίνεται:***

$$y - \frac{3}{2} = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -3x + 3 \quad (\varepsilon)$$

Από το Γ2, η f ***είναι κυρτή και η ε είναι κάτω από την*** C_f ***με εξαίρεση το σημείο*** A ***.***
Επιπλέον η ε τέμνει τον x'x στο $Z(1, 0)$***, αφού*** $y = 0 \Leftrightarrow -3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$***.***

Όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί, το χωρίο Ω χωρίζεται από την ευθεία $x = 1$ ***στα χωρία*** Ω_1 ***και*** Ω_2 ***, όπου:***

- ***Το*** Ω_1 ***περικλείεται από την*** C_f ***, την ευθεία*** ε ***και την ευθεία*** $x = 1$
- ***Το*** Ω_2 ***περικλείεται από την*** C_f ***, τον άξονα x'x και τις ευθείες*** $x = 1, x = 2$



έχουμε:

$$\boldsymbol{E(\Omega_1) = \int_{1/2}^{1}(f(x) - y_\varepsilon)dx =}$$

$$\boldsymbol{= \int_{1/2}^{1}(f(x) + 3x - 3)dx = \int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x} + 4x - 4\right)dx = \left[lnx + 2x^2 - 4x\right]_{1/2}^{1} =}$$

$$\boldsymbol{= (ln1 + 2 - 4) - \left(ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - 2\right) = -2 - ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + 2 = ln2 - \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{E(\,\Omega_2) = \int_{1}^{2} f(x)\,dx = \int_{1}^{2}\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + lnx - x\right]_{1}^{2} =}$$

$$\boldsymbol{= (2 + ln2 - 2) - \left(\frac{1}{2} + ln1 - 1\right) = ln2 - \frac{1}{2} + 1 = ln2 + \frac{1}{2}}$$

Προφανώς είναι:

$$\boldsymbol{E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\,\Omega_2) = 2ln2}$$

<u>Σημείωση</u> Μπορούμε να υπολογίσουμε το $E(\Omega)$ και αν από το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1/2, x = 2$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΗΖ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. *Η συνάρτηση* $f(x) = ax + \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, *με* $a \in \mathbb{R}$, *είναι παραγωγίσιμη, με*

$$f'(x) = a + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Έχουμε τώρα

$$e^{f(x)-1} - x \geq \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)-1} - x - \sqrt{x^2+1} \geq 0 \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Ορίζουμε την

$$g(x) = e^{f(x)-1} - x - \sqrt{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Και η (2) *γράφεται*

$$g(x) \geq 0 \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι

$$g(0) = e^{f(0)-1} - 0 - \sqrt{0+1} = e^0 - 1 = 0$$

Άρα

$$g(x) \geq g(0) \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον η g ***είναι παραγωγίσιμη,*** *με:*

$$g'(x) = e^{f(x)-1} \cdot f'(x) - 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

- *Η* g *παρουσιάζει ολικό άρα και* ***τοπικό ελάχιστο*** *στο* $x_0 = 0$
- *Το* $x_0 = 0$ *είναι* ***εσωτερικό σημείο*** *του* $\mathbb{R} = D_g$
- *Η* g *είναι* ***παραγωγίσιμη*** *στο* $x_0 = 0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα ***Fermat:***

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow e^{f(0)-1} \cdot f'(0) - 1 - \frac{0}{\sqrt{0+1}} = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$$

Από την (1) *έχουμε* $f'(0) = \alpha$, *άρα* $\alpha = 1$ ***και ο τύπος της*** f ***γράφεται:***

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$$

Δ2. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$, *ισχύει:*

$$-x \leq |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$$

άρα

$$-x < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Επομένως η C_f είναι πάνω από τον άξονα x'x.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, με

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \;,\; \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3.α). *Η συνάρτηση F είναι **αρχική της f** στο $\mathbb{R}$, **επομένως***

$$F'(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$$

Για τον υπολογισμό του ορίου

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-f(x)-1}{1-\sigma\upsilon\nu x}$$

έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0} (F(x)-f(x)-1) = F(0)-f(0)-1 = 2-1-1 = 0$, ***αφού F, f συνεχείς ως παραγωγίσιμες***
- $\lim\limits_{x\to 0} (1-\sigma\upsilon\nu x) = 1-\sigma\upsilon\nu 0 = 0$

*Άρα το όριο έχει **μορφή 0/0** και, από τον **κανόνα DLH**, έχουμε:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-f(x)-1}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)-f'(x)}{\eta\mu x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}}{\eta\mu x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\eta\mu x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\eta\mu x}\right] = 1 \cdot 0 = 0$$

Διότι

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(0)}{\sqrt{0^2+1}} = \frac{1}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+1-1}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\cdot \eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 0 \cdot \frac{1}{1} = 0$

Δ3.β) *Η εξίσωση **ορίζεται στο $\mathbb{R}$** και γράφεται ισοδύναμα:*

$$\frac{F(x^2)+F(-x^2)}{2} = F(0) \Leftrightarrow F(x^2)+F(-x^2) = 2F(0) \qquad (3)$$

Για $x=0$, $(3) \Leftrightarrow F(0)+F(0) = 2F(0)$, που ισχύει. Άρα το 0 είναι μια ρίζα της (3).

Θα δείξουμε ότι η (3) ***δεν*** *έχει άλλη ρίζα.*

Για κάθε $x \neq 0$ *είναι* $-x^2 < 0 < x^2$ *και*

- *Η συνάρτηση* F *είναι* ***συνεχής*** *στα* $[-x^2, 0]$, $[0, x^2]$ *ως παρ/μη*
- *Η συνάρτηση* F *είναι* ***παραγωγίσιμη στα*** $(-x^2, 0)$, $(0, x^2)$

Άρα, ***από το ΘΜΤ,*** *υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\zeta_1 \in (-x^2, 0)$ ***και*** *ένα τουλάχιστον* $\zeta_2 \in (0, x^2)$

τέτοια, ώστε:

$$\frac{F(0) - F(-x^2)}{0 + x^2} = F'(\zeta_1) = f(\zeta_1) \text{ και } \frac{F(x^2) - F(0)}{x^2 - 0} = F'(\zeta_2) = f(\zeta_2)$$

Γνωρίζουμε από το Δ2 ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως

$$\zeta_1 < 0 < \zeta_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\zeta_1) < f(\zeta_2) \Rightarrow \frac{F(0) - F(-x^2)}{x^2} < \frac{F(x^2) - F(0)}{x^2} \overset{x^2>0}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow F(0) - F(-x^2) < F(x^2) - F(0) \Rightarrow F(x^2) + F(-x^2) > 2F(0)$$

Άρα η (3) δεν αληθεύει για $x \neq 0$.

Σημείωση: Η εξίσωση λύνεται και θεωρώντας τη βοηθητική συνάρτηση $H(x) = F(x^2) + F(-x^2)$ και χρησιμοποιώντας το ολικό ελάχιστο αυτής…

Δ4. *Γνωρίζουμε ότι*

$$lnx \leq x - 1, \text{ για κάθε } x > 0 \qquad (\#)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Επιπλέον, ***για κάθε*** $x \in \mathbb{R}$ *είναι* $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) + 1 > 1$. *Άρα αν θέσουμε στην* $(\#)$ ***όπου x το $f(x) + 1$, προκύπτει:***

$$ln(f(x) + 1) < f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα για $x \geq 0$ *έχουμε:*

$$xln(f(x) + 1) \leq xf(x),$$

και η ισότητα ισχύει ***μόνο για*** $x = 0$. *Επομένως*

$$\int_0^1 x \cdot ln(1 + f(x))dx < \int_0^1 x \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + x\sqrt{x^2 + 1}\right) dx$$

$$= \int_0^1 x^2\, dx + \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{1}{3} + I$$

Στο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\, dx$$

θέτουμε

$$u = x^2 + 1\,,\ \ \mu\varepsilon\ \ du = 2xdx$$

- $x = 0 \Rightarrow u = 1$
- $x = 1 \Rightarrow u = 2$

και

$$I = \int_1^2 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[u\sqrt{u}\right]_1^2 = \frac{1}{3}2\sqrt{2} - \frac{1}{3}$$

Τελικά

$$\int_0^1 x \cdot ln\big(1 + f(x)\big)dx < \frac{1}{3} + I = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$