ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 25-26 $(\star)$

Η εξεταζόμενη ύλη είναι: συναρτήσεις, όριο, συνέχεια, παράγωγος μέχρι μονοτονία και ακρότατα, κανόνες DLH, ασύμπτωτες, αρχική, ορισμένο ολοκλήρωμα και μέθοδοι ολοκλήρωσης

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**, και επιπλέον ισχύει

- $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ στο $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x_0})$ και $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ στο $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{\beta})$, τότε το $\boldsymbol{f(x_0)}$ είναι **τοπικό μέγιστο της $\boldsymbol{f}$.**

(Μονάδες 6)

Α2. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{A}$;

(Μονάδες 3)

Α3. Έστω ότι οι συναρτήσεις $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ είναι, αντιστοίχως, **αρχικές** των συναρτήσεων $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ στο διάστημα Δ και $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

η συνάρτηση $\lambda \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\mu G}$ είναι **αρχική** της $\boldsymbol{\lambda f} + \boldsymbol{\mu g}$ στο διάστημα Δ.

(Μονάδες 4)

Α4. Να διατυπώσετε το **Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.**

(Μονάδες 4)

Α5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Για κάθε συνάρτηση f που είναι γνησίως φθίνουσα και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ ισχύει $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, για κάθε x στο εσωτερικό του Δ. **Σ Λ**

β) Τα εσωτερικά σημεία του $\boldsymbol{D_f}$ στα οποία η $\boldsymbol{f'}$ μηδενίζεται είναι θέσεις τοπικού ακρότατου για κάθε συνάρτηση f. **Σ Λ**

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο αυτής. **Σ Λ**

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και μη αρνητική στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε το **εμβαδόν** του χωρίου Ω που περικλείεται από την $\boldsymbol{C_f}$, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ είναι:

$$\boldsymbol{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$$ **Σ Λ**

(Μονάδες 2x4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \alpha x - ln(x+1),\ \ x > -1 \quad \kappa\alpha\iota \quad g(x) = x + 2 + \frac{lnx}{x}\ ,\ \ x > 0$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, η συνάρτηση f έχει **τοπικό ακρότατο στη θέση** $x_o = 0$.

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

(Μονάδες 4)

Β2. Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της f.

(Μονάδες 5)

Β3. α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g .

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι κάθετη στην **πλάγια** ασύμπτωτη της C_g .

(Μονάδες 3+3+4)

Β4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I = \int_0^1 \big(x - f(x)\big)dx \qquad\qquad J = \int_1^e (g(x) - x)dx$$

(Μονάδες 3+3)

ΘΕΜΑ Γ

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

- $f(0) = 0$
- $f'(x) = 2 + 2xe^{2x - f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 - e^{f(x) - 2x}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι **σταθερή** και ότι:

$$f(x) = 2x + ln(x^2 + 1),\ \ x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 4)

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στη συνέχεια να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της f'.

(Μονάδες 2+4)

Γ3. Να λύσετε την **ανίσωση:** $f\left(f'(1 + ln^2 x)\right) < f\left(\frac{14}{5}\right)$

(Μονάδες 5)

Δίνεται και η **συνεχής** συνάρτηση:

$$h(x) = \begin{cases} f'(x)\ , & x > 0 \\ 1 + \sigma\upsilon\nu^2 x, & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Γ4. α) Να βρείτε τα **κρίσιμα σημεία** της συνάρτησης h .

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$K = \int_{-\pi/2}^{1} h(x)dx$$

(Μονάδες 5+5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{\lambda x - \ln x}\ ,\ \mu\varepsilon\ \lambda \geq \frac{1}{2}$$

Δ1. Να δείξετε ότι πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

Αν επιπλέον ισχύει: $f(x) \leq \frac{x}{\lambda}$**, για κάθε** $x \in (0, +\infty)$**, τότε**

Δ2. Να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

(Μονάδες 5)

Δ3. α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f **.**

β) Να βρείτε το **πλήθος των λύσεων** της εξίσωσης $x^a = e^{(a-1)x}$, $x \in (0, +\infty)$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 4+4)

Δίνεται και η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\ , & x \in (0, 1) \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$$

Δ4. α) Να δείξετε ότι η $\boldsymbol{g}$ είναι **παραγωγίσιμη.**

β) Αν η συνάρτηση $\boldsymbol{H}$ είναι **μια παράγουσα** της

$$\boldsymbol{h(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^2}} \quad , \boldsymbol{x \in [0, 1)}$$

με $\boldsymbol{H(0) = 0}$ **,** τότε να δείξετε ότι:

$$\boldsymbol{g(x) \geq (1-x)H(x), \quad x \in [0, 1).}$$

(Μονάδες 2+5)

Καλή Επιτυχία !

(⋆) *Το παρόν κριτήριο εξέτασης συντάχθηκε από την ομάδα διδασκόντων του Τομέα Μαθηματικών του Φροντιστηρίου αξία και αποτελεί πνευματική τους ιδιοκτησία. Η χρήση του εκτός Φροντιστηρίου, επιτρέπεται μόνο για εκπαιδευτικούς σκοπούς. Οποιαδήποτε άλλη χρήση ή αναπαραγωγή χωρίς άδεια, μπορεί να επιφέρει τις προβλεπόμενες από το Νόμο κυρώσεις.*