ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ***Σχολικό βιβλίο σελίδα 144 .***

Α2. ***Σχολικό βιβλίο σελίδα 141.***

Α3. ***Για κάθε*** $x \in \Delta$ ***έχουμε:***

$$(\lambda F + \mu G)'(x) = (\lambda F)'(x) + (\mu G)'(x) = \lambda F'(x) + \mu G'(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) =$$

$$= (\lambda f + \mu g)(x) \text{ επομένως η } \lambda F + \mu G \text{ είναι αρχική της } \lambda f + \mu g \text{ στο } \Delta.$$

Α4. ***Σχολικό βιβλίο σελίδα 216.***

Α5. *α=Λ, β=Λ, γ=Σ, δ=Σ*

ΘΕΜΑ Β

Β1. *Η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $(-1, +\infty)$*, ως σύνθεση και διαφορά παρ/μων, με:*

$$f'(x) = \alpha - \frac{1}{x+1} \quad , \quad x \in (-1, +\infty)$$

Τώρα βλέπουμε ότι:

- *η* f *παρουσιάζει* ***τοπικό ακρότατο στο*** $x_0 = 0$ *,*
- *το* $x_0 = 0$ *είναι* ***εσωτερικό σημείο*** *του* $(-1, +\infty) = D_f$ *και*
- ***η*** f *είναι* ***παρ/μη στο σημείο*** $x_0 = 0$

Άρα, από το θεώρημα ***Fermat, έχουμε*** $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Β2. ***Για κάθε*** $x \in (-1, +\infty)$*, έχουμε:*

$$f(x) = x - \ln(x+1)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

Βρίσκουμε τώρα τις ρίζες και τα πρόσημα της f'.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

Άρα ισχύει ο πίνακας:

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	$\circ$	$+$	
f			$\searrow$	$\circ$	$\nearrow$	

Αφού $f'(x) < 0$ *στο* $(-1,0)$ *,* $f'(x) > 0$ *στο* $(0,+\infty)$ *και* f ***συνεχής*** *στο* 0*, έπεται ότι η* f *είναι* ***γνησίως φθίνουσα στο*** $(-1,0]$, ***γνησίως αύξουσα στο*** $[0,+\infty)$ *και παρουσιάζει* ***ολικό ελάχιστο στο*** $x_o = 0$ ***, το*** $f(x_o) = 0$.

Σημείωση: Η f ***δεν έχει άλλο ακρότατο αφού είναι παρ/μη στο ανοιχτό διάστημα*** $(-1,+\infty) = D_f$ ***και*** $f'(x) \neq 0$ ***για κάθε*** $x \neq 0$.

Β3.(α) *Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ και είναι συνεχής σ' αυτό, ως πηλίκο και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Άρα αναζητούμε ασύμπτωτες μόνο στα άκρα του D_g.*

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$g(x) - (x+2) = \frac{\ln x}{x} \quad , \quad x \in (0,+\infty)$$

άρα

$$\lim_{x\to+\infty}[\, g(x) - (x+2)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\infty/\infty}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Επομένως, η ευθεία $\zeta\colon y = x+2$ ***είναι πλάγια ασύμπτωτη της*** C_g ***στο +∞.***

Επιπλέον

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}\left[x + 2 + \frac{\ln x}{x}\right] = -\infty$$

Διότι: $\lim\limits_{x\to0^+}(x+2) = 0+2 = 2$ *και*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot \ln x\right) = -\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(1/x) = +\infty$ *και* $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x = -\infty$.

Επομένως η ευθεία $x = 0$ ***είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της*** C_g ***.***

Β3.(β) Η εφαπτομένη ε της C_f ***στο σημείο*** $M(x_1, f(x_1))$ ***έχει κλίση*** $\lambda_\varepsilon = f'(x_1)$

$$\varepsilon \perp \zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1+1} = -1 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$y - f\left(-\frac{1}{2}\right) = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y + \frac{1}{2} + ln\left(\frac{1}{2}\right) = -1\left(x+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$y + \frac{1}{2} - ln2 = -x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -x - 1 + ln2 \quad (\varepsilon)$$

B4.

$$I = \int_0^1 (x - f(x))dx = \int_0^1 ln(x+1)dx = \int_0^1 (x+1)' ln(x+1)dx =$$

$$= [(x+1)ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx = 2ln2 - 0 - \int_0^1 1dx =$$

$$= 2ln2 - [x]_0^1 = 2ln2 - 1, \text{ άρα}$$

$$I = ln\left(\frac{4}{e}\right)$$

Και

$$J = \int_1^e (g(x) - x)dx = \int_1^e \left(\frac{lnx}{x} + 2\right)dx = \int_1^e \frac{lnx}{x}dx + \int_1^e 2dx$$

Στο 1ο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = lnx$ ***με*** $du = \frac{1}{x}\,dx$

- ***για*** $x = 1$ ***είναι*** $u = 0$
- ***για*** $x = e$ ***είναι*** $u = 1$

επομένως

$$\int_1^e \frac{lnx}{x}dx = \int_0^1 udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

και

$$\int_1^e 2dx = [2x]_1^e = 2e - 2$$

Άρα

$$J = 2e - \frac{3}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f'(x) = 2 + 2xe^{2x-f(x)} \ , \ \ x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Γ1. *Η συνάρτηση* g *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *ως πράξεις και σύνθεση παρ/μων , με*

$$g'(x) = 2x - e^{f(x)-2x} \cdot (f'(x) - 2) \underset{(1)}{=} 2x - e^{f(x)-2x} \cdot 2x \cdot e^{2x-f(x)} = 2x - 2xe^{0} = 0$$

Δηλαδή: $g'(x) = 0, \ \ x \in \mathbb{R}.$

Από τις συνέπειες του ΘΜΤ, η g ***είναι σταθερή, επομένως υπάρχει*** $c \in \mathbb{R}$***, ώστε:***

$$g(x) = c \Leftrightarrow x^2 - e^{f(x)-2x} = c, \ \ x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Για $x = 0$ ***η*** (2) ***γίνεται***

$$0 - e^{f(0)} = c \Leftrightarrow -e^{0} = c \Leftrightarrow c = -1$$

Άρα

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - e^{f(x)-2x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = e^{f(x)-2x} \Leftrightarrow ln(x^2+1) = f(x) - 2x$$

Τελικά

$$f(x) = 2x + ln(x^2+1) \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

Γ2. *Η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$*, με*

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1} \ \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

Το τριώνυμο $2x^2 + 2x + 2$ *έχει αρνητική διακρίνουσα* $\Delta = -12$*, άρα είναι ομόσημο του 2, δηλαδή* ***θετικό,*** *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $f'(x) > 0$***, για κάθε*** $x \in \mathbb{R}$ ***και η συνάρτηση*** f ***είναι γνησίως αύξουσα στο*** $\mathbb{R}$***.***

Η f' *είναι παραγωγίσιμη , με*

$$f''(x) = \left(2 + \frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+1) - 2x2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \ \ , \ \ x \in \mathbb{R}$$

Τα πρόσημα της f'' ***ταυτίζονται με εκείνα του διωνύμου*** $1 - x^2$***, άρα ισχύει ο πίνακας:***

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
f'	↘		↗		↘	

Επειδή επιπλέον η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, προκύπτει ότι η f' είναι

- ***γνησίως φθίνουσα στο*** $(-\infty, -1]$
- ***γνησίως αύξουσα στο*** $[-1, 1]$
- ***γνησίως φθίνουσα στο*** $[1, +\infty)$

και παρουσιάζει

- ***τοπικό ελάχιστο στο -1, το*** $f'(-1) = \cdots = 1$
- ***τοπικό μέγιστο στο 1, το*** $f'(1) = \cdots = 3$

Γ3. *Αφού οι συναρτήσεις* f, f' ***ορίζονται*** *στο* $\mathbb{R}$, ***η ανίσωση***

$$f\left(f'\left(1 + ln^2x\right)\right) < f\left(\frac{14}{5}\right) \quad (3)$$

ορίζεται *όταν ορίζεται ο* lnx, *ισοδύναμα αν* $x > 0$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$, ***έχουμε:***

$$(3) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f'\left(1 + ln^2x\right) < \frac{14}{5}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $f'(2) = 14/5$ *και η ανίσωση γίνεται*

$$f'\left(1 + ln^2x\right) < f'(2)$$

Για κάθε $x > 0$, ***έχουμε:*** $ln^2x \geq 0 \Leftrightarrow 1 + ln^2x \geq 1$ ***άρα οι αριθμοί*** $1 + ln^2x$, 2 ***ανήκουν και οι δυο στο διάστημα*** $[1, +\infty)$ ***στο οποίο η f' είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα***

$$f'\left(1 + ln^2x\right) < f'(2) \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} 1 + ln^2x > 2 \Leftrightarrow ln^2x > 1 \Leftrightarrow |lnx| > 1 \Leftrightarrow lnx < -1 \text{ ή } lnx > 1$$

$$\Leftrightarrow lnx < lne^{-1} \text{ ή } lnx > lne \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e} \text{ ή } x > e$$

Τελικά οι λύσεις της (3) ***είναι*** $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$.

Γ4. (α)

$$h(x) = \begin{cases} f'(x), & x > 0 \\ 1 + \sigma\upsilon\nu^2 x, & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Πεδίο ορισμού της h είναι το $D_h = [-\pi, 0] \cup (0, +\infty) = [-\pi, +\infty)$

Κρίσιμα σημεία της h είναι τα εσωτερικά σημεία του D_h στα οποία η h' δεν ορίζεται ή μηδενίζεται.

*Εξετάζουμε πρώτα την **παραγωγισιμότητα** της h στο **(-π,+∞)***

- *στο **(-π,0)** η* $h(x) = 1 + συν^2 x$ *είναι παρ/μη με* $\boldsymbol{h'(x) = -2ημxσυνx}$
- *στο **(0,+∞)** η* $h(x) = f'(x)$ *είναι παρ/μη με* $\boldsymbol{h'(x) = f''(x)} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$
- *στο* $\boldsymbol{x_0 = 0}$*, έχουμε* $\boldsymbol{h(0) = 2 = f'(0)}$ *και:*

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+συν^2x-2}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{συν^2x-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-ημ^2x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left[-ημx \cdot \frac{ημx}{x}\right] = -0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = f''(0) = 2$$

Εφόσον $\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ ***, η h δεν είναι παρ/μη στο 0.***

Άρα το $\boldsymbol{x_0 = 0}$ ***είναι ένα από τα κρίσιμα σημεία της.***

*Βρίσκουμε τώρα τα σημεία **μηδενισμού** της **h'.***

Στο (-π,0) είναι $ημx < 0$ ***άρα***

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2ημxσυνx = 0 \Leftrightarrow συνx = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

Άρα το $x_1 = -\pi/2$ ***είναι κρίσιμο σημείο της h.***

Στο (0,+∞)

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0 \overset{Γ2}{\Leftrightarrow} x = 1$$

Τελικά τα κρίσιμα σημεία της h είναι $x_0 = 0, x_1 = -\pi/2$ ***και*** $x_2 = 1$.

Γ4.(β)

Αφού η h είναι συνεχής είναι

$$K = \int_{-\pi/2}^{1} h(x)dx = \int_{-\pi/2}^{0} h(x)dx + \int_{0}^{1} h(x)dx =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \left(1 + συν^2x\right)dx + \int_{0}^{1} f'(x)dx =$$

$$= [x]_{-\pi/2}^{0} + [f(x)]_{0}^{1} + \int_{-\pi/2}^{0} \sigma\upsilon\nu^2 x dx = 0 + \frac{\pi}{2} + f(1) - f(0) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sigma\upsilon\nu^2 x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2 + ln2 + N$$

Όπου τώρα

$$N = \int_{-\pi/2}^{0} \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int_{-\pi/2}^{0} \sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x)' dx = [\sigma\upsilon\nu x \eta\mu x]_{-\pi/2}^{0} - \int_{-\pi/2}^{0} (\sigma\upsilon\nu x)' \eta\mu x dx =$$

$$= 0 + \int_{-\pi/2}^{0} \eta\mu^2 x dx = \int_{-\pi/2}^{0} (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) dx = [x]_{-\pi/2}^{0} - \int_{-\pi/2}^{0} \sigma\upsilon\nu^2 x dx$$

Άρα

$$N = [x]_{-\pi/2}^{0} - N \Leftrightarrow 2N = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow N = \frac{\pi}{4}$$

Τελικά

$$K = \frac{\pi}{2} + 2 + ln2 + \frac{\pi}{4} = 2 + ln2 + \frac{3\pi}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. *Η συνάρτηση f ορίζεται όταν*

$$x > 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \lambda x - lnx \neq 0$$

Ορίζουμε *τώρα τη συνάρτηση*

$$k(x) = \lambda x - lnx\,, \;\; x > 0 \; \mu\varepsilon \; \lambda \geq 1/2$$

*Η **k** είναι παραγωγίσιμη, με*

$$k'(x) = \lambda - \frac{1}{x} = \frac{\lambda x - 1}{x} = \frac{\lambda}{x} \cdot \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \;\; , \;\; x > 0$$

και

- $k'(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow x = 1/\lambda$
- $k'(x) > 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{\lambda} > 0 \Leftrightarrow x > 1/\lambda$
- $k'(x) < 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1/\lambda$

*Επιπλέον η **k** είναι **συνεχής στο** $(0, +\infty)$**,** ως άθροισμα συνεχών.*

Επομένως η k παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 1/\lambda$ το

$$k_{min} = k\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} - ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 + ln\lambda$$

Είναι

$$\lambda \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow ln\lambda \geq ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + ln\lambda \geq 1 - ln2 \Leftrightarrow k\left(\frac{1}{\lambda}\right) \geq lne - ln2 > 0$$

Επομένως

$$k(x) \geq k\left(\frac{1}{\lambda}\right) > 0 \text{ , για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα $k(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in (0, +\infty)$*, από το οποίο προκύπτει ότι* $D_f = (0, +\infty)$ **.**

Δ2. *Δίνεται ότι:*

$$f(x) \leq \frac{x}{\lambda} \Leftrightarrow f(x) - \frac{x}{\lambda} \leq 0 \text{ , για κάθε } x \in (0, +\infty) \ \ (1)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{x}{\lambda} \ , \ x \in (0, +\infty)$$

η οποία είναι παρ/μη, με

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda x - lnx - x\left(\lambda - \frac{1}{x}\right)}{(\lambda x - lnx)^2} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1 - lnx}{(\lambda x - lnx)^2} - \frac{1}{\lambda} \ , \ x \in (0, +\infty)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\varphi(1) = f(1) - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 0$$

Άρα η (1) γράφεται

$$\varphi(x) \leq \varphi(1) \ , \ x \in (0, +\infty)$$

Άρα

- ***Η συνάρτηση φ παρουσιάζει ολικό (άρα και τοπικό) μέγιστο στο 1***
- ***Το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$***
- ***Η φ είναι παρ/μη στο 1,***

Επομένως, από το θεώρημα Fermat, έχουμε:

$$\varphi'(1)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}=0 \Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda^2}=0 \Leftrightarrow \lambda=1$$

Δ3.(α) *Είναι:*

$$f(x)=\frac{x}{x-lnx} \ \ , \ \ x\in(0,+\infty)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη, με

$$f'(x)=\frac{1(x-lnx)-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-lnx)^2}=\frac{1-lnx}{(x-lnx)^2} \ \ , \ \ x\in(0,+\infty)$$

Ο παρονομαστής είναι προφανώς θετικός, άρα

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-lnx=0 \Leftrightarrow lnx=lne \Leftrightarrow x=e$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-lnx<0 \Leftrightarrow lnx>lne \Leftrightarrow x>e$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-lnx>0 \Leftrightarrow lnx<lne \Leftrightarrow 0<x<e$

*Επιπλέον η f είναι **συνεχής** ως παρ/μη, άρα*

είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$, γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=e$ το $f(e)=\frac{e}{e-1}$.

*Βρίσκουμε τα όρια της **f στα άκρα** του $(0,+\infty)=D_f$*

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x-lnx}\cdot x\right)=0\cdot0=\mathbf{0}$$

αφού $\lim_{x\to0^+}(x-lnx)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-lnx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{lnx}{x}}=\frac{1}{1-0}=\mathbf{1}$$

αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$ ***(δες Β3α)***

Τώρα ισχύουν τα παρακάτω:

*Η f είναι **συνεχής και γνησίως αύξουσα** στο $\Delta_1=(0,e]$ άρα*

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to0^+}f(x),f(e)\right]=\left(0,\frac{e}{e-1}\right]$$

*Η f είναι **συνεχής και γνησίως φθίνουσα** στο $\Delta_2=(e,+\infty)$ άρα*

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to e^+}f(x)\right)=\left(1,\frac{e}{e-1}\right)$$

Τελικά ***το σύνολο τιμών της f*** *είναι*

$$f\left(D_f\right)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left(0\,,\ \frac{e}{e-1}\right]$$

Δ3.(β) *Για κάθε $x\in(0,+\infty)$, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:*

$$x^a=e^{(a-1)x}\Leftrightarrow lnx^a=lne^{(a-1)x}\Leftrightarrow alnx=(a-1)x\Leftrightarrow ax-alnx=x\Leftrightarrow$$

$$a(x-lnx)=x\Leftrightarrow a=\frac{x}{x-lnx}\Leftrightarrow f(x)=a\ \ (2)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha\le 0$ ***ή*** $\alpha>\frac{e}{e-1}$ ***, τότε το*** $\alpha\notin f\left(D_f\right)$***, επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη***
- $0<\alpha\le 1$ ***ή*** $\alpha=\frac{e}{e-1}$***, τότε το*** $\alpha\notin f(\Delta_2)$***, επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη στο*** Δ_2 ***ενώ*** $\alpha\in f(\Delta_1)$ ***, επομένως η εξίσωση έχει ρίζα στο*** Δ_1 ***η οποία είναι μοναδική αφού η*** f ***είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό.***
- $1<\alpha<\frac{e}{e-1}$***, τότε*** $\alpha\in f(\Delta_1)$ ***και*** $\alpha\in f(\Delta_2)$ ***επομένως, λόγω μονοτονίας της*** f ***στα διαστήματα*** Δ_1 ***και*** Δ_2 ***, η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα στο*** Δ_1 ***και ακριβώς μία ρίζα στο*** Δ_2

Τελικά το πλήθος # των λύσεων της εξίσωσης (2)

$$\#=\begin{cases}0, & \gamma\iota\alpha\ \ \alpha\in(-\infty,0]\cup\left(\dfrac{e}{e-1}\ ,+\infty\right)\\ 1, & \gamma\iota\alpha\ \ \alpha\in(0,1]\cup\left\{\dfrac{e}{e-1}\right\}\\ 2, & \gamma\iota\alpha\ \ \alpha\in\left(1,\dfrac{e}{e-1}\right)\end{cases}$$

Δ4.

$$g(x)=\begin{cases}f(x)\,, & x\in(0,1)\\ 0\ \ \ , & x=0\end{cases}$$

(α) Στο διάστημα $(0,1)$ ***η*** g ***είναι παρ/μη με***

$$g'(x)=f'(x)=\frac{1-lnx}{(x-lnx)^2}$$

Στο 0 έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x-lnx}=0$$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(x-lnx)=+\infty$ ***άρα*** $g'(0)=0$.

Τελικά η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\mathbf{0},\mathbf{1})$.

(β) *Πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in [0,1)$ ισχύει*

$$\boldsymbol{g(x) \geq (1-x)H(x)}, \qquad (\mathbf{3})$$

Για κάθε $x \in [0,1)$ έχουμε $\mathbf{1-x>0}$***, και***

$$(\mathbf{3}) \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{g(x)}}{\boldsymbol{1-x}} \geq \boldsymbol{H(x)} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{g(x)}}{\boldsymbol{1-x}} - \boldsymbol{H(x)} \geq \mathbf{0} \qquad (\mathbf{4})$$

Ορίζουμε *την συνάρτηση*

$$\boldsymbol{T(x) = \frac{g(x)}{1-x} - H(x), \quad x \in [0,1)}$$

*Αφού η $\boldsymbol{H}$ είναι **αρχική της $\boldsymbol{h}$ στο** $[\mathbf{0},\mathbf{1})$, θα ισχύει $\boldsymbol{H'(x) = h(x)}$, επομένως η $\boldsymbol{T}$ είναι παρ/μη με:*

$$\boldsymbol{T'(x) = \frac{g'(x)(1-x)+g(x)}{(1-x)^2} - H'(x) = \frac{g'(x)(1-x)+g(x)}{(1-x)^2} - h(x) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{g'(x)(1-x)+g(x)}{(1-x)^2} - \frac{g(x)}{(1-x)^2} = \frac{g'(x)(1-x)}{(1-x)^2}} \quad , \quad \boldsymbol{x[0,1)}$$

Βλέπουμε τώρα ότι για κάθε $x \in (0,1)$ είναι

$$\boldsymbol{g'(x) = f'(x) > 0} \text{ , από το Δ3(α), και } \boldsymbol{1-x>0}$$

Άρα $T'(x) > 0$ στο $(0,1)$ και επειδή η T είναι συνεχής στο 0 , ως παρ/μη, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1)$. Επομένως :

$$\boldsymbol{0 \leq x < 1 \Leftrightarrow T(0) \leq T(x) \Leftrightarrow g(0) - H(0) \leq \frac{g(x)}{1-x} - H(x) \Leftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{\frac{g(x)}{1-x} - H(x) \geq 0 \Leftrightarrow (4)}$$