

Η εξεταζόμενη ύλη είναι: συναρτήσεις, όριο, συνέχεια, ορισμός παράγωγου και κανόνες παραγωγίσιμης.

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 6)

A2. Να διατυπώσετε το **Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής** και να κάνετε το ανάλογο σχήμα.

(Μονάδες 4)

A3. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και τι ονομάζουμε παράγωγο της f στο σημείο αυτό;

(Μονάδες 3)

A4. Αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση f είναι **συνεχής** και **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα Δ , να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να τον μεταφέρετε στο τετράδιό σας.

Δ	$f(\Delta)$
(α, β)	
$[\alpha, \beta)$	
$(\alpha, \beta]$	
$[\alpha, \beta]$	

(Μονάδες 4)

A5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση $f: (-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, τότε υποχρεωτικά διατηρεί πρόσημο στο πεδίο ορισμού της.

Σ Λ

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Σ Λ

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε η f παίρνει όλες τις τιμές που βρίσκονται **ενδιαμέσως** των $f(\alpha), f(\beta)$.

Σ Λ

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του D_f , τότε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-h)+f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Σ Λ

(Μονάδες 2x4)

ΘΕΜΑ Β

Για τον πραγματικό αριθμό a και τη συνάρτηση g ισχύουν τα εξής:

◦ $a \neq 0$

◦ $g(x) = \frac{x}{a+x}$, $x \neq -a$

◦ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A\left(a, \frac{a}{2}\right)$

B1. Να δείξετε ότι $a = 1$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

(Μονάδες 4)

B2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και ότι $g^{-1}(x) = x/(1-x)$, $x \neq 1$

(Μονάδες 5)

Αν $\varphi(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

B3. Να βρείτε τη σύνθεση της g^{-1} με την φ .

(Μονάδες 5)

Αν $f(x) = (\varphi \circ g^{-1})(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0, 1)$

B4. Να βρείτε τα όρια:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

(Μονάδες 3+3)

B5. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$g(x) = g^{-1}(x) + 2x - 4$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(3,4)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Για τη **συνεχή** συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

- $f(0) = 1$
- $f(x)(f(x) - 2x) = e^{2x} - x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

(Μονάδες 4)

Γ3. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$K = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{2^x + 1}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + \eta \mu x)$$

(Μονάδες 3+3)

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{e^x}{x-1} + \frac{f(x)}{x-2} = f(2025)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

(Μονάδες 5)

Γ5. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha^2 - e^x + f(x), & x < 0 \\ x^3 + \alpha x + f(0), & x \geq 0 \end{cases}$$

να είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο $x_0 = 0$. Ποια είναι τότε η $g'(0)$;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Για τη **συνεχή** συνάρτηση $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

- $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}e^{-\pi/2} - 1$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}e^{\pi/2} + 1$
- $e^{-2x}f^2(x) - 2xf(x)e^{-x} + x^2 = e^{-2x} \cdot \eta \mu^2 x$, για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = xe^x + \eta\mu x, x \in [-\pi, \pi]$.

(Μονάδες 6)

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in [0, \pi] \\ 1 - 2x - \sqrt{x^2 + 1} & , x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$.

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 3)$, ώστε:

$$3g(x_0) = e + 2e^2 + 3e^3 + \eta\mu 1 + \eta\mu 2 + \eta\mu 3$$

(Μονάδες 4)

Δ3. (α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g .

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$g(x) = \pi^{\pi+1}$$

έχει μοναδική ρίζα ρ .

(Μονάδες 5+5)

Δ4. Αν ρ είναι η ρίζα του ερωτήματος Δ.3β), να βρείτε το όριο

$$M = \lim_{x \rightarrow \rho} \frac{\rho}{(g(x) - \pi^{\pi+1})(x - \rho)}$$

(Μονάδες 5)

Καλή Ειπαυχία !

(*) Το παρόν κριτήριο εξέτασης συντάχθηκε από την ομάδα διδασκόντων του Τομέα Μαθηματικών του Φροντιστηρίου αξία και αποτελεί πνευματική τους ιδιοκτησία. Η χρήση του εκτός Φροντιστηρίου, επιτρέπεται μόνο για εκπαιδευτικούς σκοπούς. Οποιαδήποτε άλλη χρήση ή αναπαραγωγή χωρίς άδεια, μπορεί να επιφέρει τις προβλεπόμενες από το Νόμο κυρώσεις.