

1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ-Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ Λυκείου
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχορικό Βιβλίο σελ. 99
A2. Σχορικό Βιβλίο σελ. 77
A3. Σχορικό Βιβλίο σελ. 95

A4.

Δ	$f(x)$
(a, b)	$\left(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$
$[a, b)$	$\left(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) \right)$
$(a, b]$	$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right)$
$[a, b]$	$[f(b), f(a)]$

- A5. α) $\wedge$ β) $\wedge$ γ) $\exists$ δ) $\wedge$

ΘΕΜΑ 3

(2)

$$B1. A(a, \frac{a}{2}) \in G \Leftrightarrow g(a) = \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2a} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow$$

$$2a = 2a^2 \xLeftrightarrow{a \neq 0} \boxed{a=1}$$

$$\text{Άρα } g(x) = \frac{x}{1+x} \quad \mu \in Dg = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

B2. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (a, -1) \cup (-1, a)$ με $g(x_1) = g(x_2)$ έχουμε:

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \Rightarrow x_1(1+x_2) = x_2(1+x_1)$$

$$\Rightarrow x_1 + x_1 x_2 = x_2 + x_2 x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα g 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

$$\begin{cases} g(x) = y \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1+x} = y \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + yx \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - xy = y \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(1-y) = y \\ x \neq -1. \end{cases}$$

• Αν $y=1$, τότε έχουμε: $\begin{cases} 0 \cdot x = 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$ αδύνατο

• Αν $y \neq 1$, τότε έχουμε: $\begin{cases} x = \frac{y}{1-y} \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{1-y} \\ \frac{y}{1-y} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{y}{1-y} \\ y \neq -1+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{1-y} \\ 0 \neq -1 \text{ να ισχύει} \end{cases}$$

Επομένως $g(x) = y \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$ έχουμε $g^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}, y \neq 1$

Επομένως $\boxed{g^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}, x \neq 1}$

B3. $f(x) = \ln x, x > 0$ και $g^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}, x \neq 1$

(3)

$$D_{f \circ g^{-1}} = \{x \in D_{g^{-1}} \text{ και } g^{-1}(x) \in D_f\}, \text{ δηλαδή}$$

$$\boxed{x \neq 1} \text{ και } g^{-1}(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow \boxed{0 < x < 1}$$

ορα $D_{f \circ g^{-1}} = (0, 1)$

$$(f \circ g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \ln \frac{x}{1-x}.$$

B4. $A = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x}{1-x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = -\infty$, διότι

$$\text{Θέτω } \frac{x}{1-x} = u \text{ με } \lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1-x} = \frac{0}{1} = 0 \text{ ορα } u \rightarrow 0$$

οπότε $\boxed{A = -\infty}$

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{x}{1-x} =$$

$$\text{Θέτω } \frac{x}{1-x} = y \text{ με } \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x \cdot \frac{1}{1-x}\right) = +\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0$ και $1-x > 0$ κοντά στο 1- ορα

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^-} (x) = 1 \text{ ορα } \boxed{B = +\infty}$$

B5. Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = g(x) - g^{-1}(x) - 2x + 4$, $x \in [3, 4]$

• η συνάρτηση στο $[3, 4]$, ως πολλαπλασιασμός συνεχών

$$h(3) = g(3) - g^{-1}(3) - 6 + 4 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{4} > 0$$

$$h(4) = g(4) - g^{-1}(4) - 8 + 4 = \frac{4}{5} + \frac{4}{3} - 4 = -\frac{28}{15} < 0$$

ορα $h(3) \cdot h(4) < 0$

Επομένως από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = g^{-1}(x) + 2x - 4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(3, 4)$.

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x)(f(x)-2x) &= e^{2x} - x^2 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) = e^{2x} - x^2 \Leftrightarrow \\ f^2(x) - 2xf(x) + x^2 &= e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)-x)^2 = e^{2x} \Leftrightarrow |f(x)-x| = e^x \quad (1) \end{aligned}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, από (1):

$$|h(x)| = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 0 \Leftrightarrow |h(x)| = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$, άτονο, αφού $e^x > 0$ για $x \in \mathbb{R}$

Επομένως $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ κι επειδή η συνάρτηση ως άθροισμα αυτών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Όμως $h(0) = f(0) = 1 > 0$, άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από (1) έχουμε: $h(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) - x = e^x \Leftrightarrow f(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Γ2. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \cdot x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \\ \cdot x_1 < x_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε στα μέλη} \\ e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{array}$$

Άρα f γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως 1-1 και αντιστρέψιμη.

Η f είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}, \text{ διότι}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^x) = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{Άρα } Df^{-1} = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

$$\Gamma 3. \quad K = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{2^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^x - x}{2^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2^{x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2^x \left(1 + \frac{1}{2^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{e}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x} \right] = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^x = +\infty, \text{ αφού } \frac{e}{2} > 1$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0, \text{ αφού } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\text{αρα } \boxed{K = +\infty}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + m \cdot x) = -\infty, \text{ διότι:}$$

$$m \cdot x \leq 1 \Leftrightarrow f(x) + m \cdot x \leq f(x) + 1 \quad \mu \in \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 1) = -\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{επομένως } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1+e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)+1) = -\infty.$$

$$\text{άρα } \boxed{L = -\infty}$$

Γ4. Για $x \in (1, 2)$ η εξίσωση γράφεται ως:

$$e^x(x-2) + (x-1)f(x) - (x-1)(x-2)f(2025) = 0$$

$$\text{Ορίζουμε συνάρτηση } \phi(x) = e^x(x-2) + (x-1)f(x) - (x-1)(x-2)f(2025), x \in [1, 2]$$

• ϕ συνεχής στο $[1, 2]$, ως γράφει συνεχών

$$\left. \begin{array}{l} \phi(1) = -e < 0 \\ \phi(2) = f(2) = 2 + e^2 > 0 \end{array} \right\} \text{αφού } \phi(1) \cdot \phi(2) < 0$$

Επομένως από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x-1} + \frac{f(x)}{x-2} = f(2025)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$.

$$15. \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + a^2 + x, & x < 0 \\ x^3 + ax + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Για να είναι η g παραγώγιμη στο $x_0 = 0$, πρέπει να είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \\ g(0) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + a^2 + x) = a^2 \end{aligned} \right\} \text{ οπότε } a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1.$$

• Για $a = -1$, $g(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x < 0 \\ x^3 - x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}, \text{ το οποίο } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

δεν υπάρχει, οπότε η g δεν είναι παραγώγιμη.

• Για $a = 1$, $g(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x < 0 \\ x^3 + x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 1$, συνεπώς g παραγώγιμη στο 0 με $g'(0) = 1$

$$\text{Άρα } \boxed{a = 1}.$$

ΘΕΜΑ Δ

7

Δ1. Για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ έχουμε:

$$e^{-2x} f^2(x) - 2xf(x)e^{-x} + x^2 = e^{-2x} \cdot \mu^2 x \quad \xrightarrow{\cdot e^{2x}}$$

$$f^2(x) - 2xf(x)e^x + x^2 e^{2x} = \mu^2 x \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - xe^x)^2 = \mu^2 x \Leftrightarrow |f(x) - xe^x| = |\mu x| \quad (1)$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = f(x) - xe^x$, $x \in [-\pi, \pi]$, ορα από (1)

$$|h(x)| = |\mu x|, \quad x \in [-\pi, \pi] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{Για } x \in [-\pi, \pi], \quad h(x) = 0 &\Leftrightarrow |h(x)| = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} |\mu x| = 0 \Leftrightarrow \mu x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\pi \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = \pi. \end{aligned}$$

Επομένως $h(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ κι επειδή η συνάρτηση ως πράξη συνάρτησης, η h θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$.

$$\text{Οπώς } h(-\frac{\pi}{2}) = f(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 + \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} = -1 < 0$$

$$h(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} = 1 > 0$$

ορα $h(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\pi, 0)$ και $h(x) > 0$ για $x \in (0, \pi)$

Για κάθε $x \in (-\pi, 0)$, $h(x) < 0$, $\mu x < 0$ ορα από (2) έχουμε:
 $-h(x) = -\mu x \Leftrightarrow h(x) = \mu x$

Για κάθε $x \in (0, \pi)$, $h(x) > 0$, $\mu x > 0$ ορα από (2) έχουμε
 $h(x) = \mu x$

Αρα $h(x) = \mu x$ για $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ και $h(-\pi) = h(0) = h(\pi) = 0$

Επομένως $h(x) = \mu x$, $x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow f(x) - xe^x = \mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$

$$\Leftrightarrow f(x) = xe^x + \mu x, \quad \mu \in x \in [-\pi, \pi].$$

$$\Delta 2. \quad g(x) = \begin{cases} xe^x + \eta \mu x, & x \in [0, \eta] \\ 1 - 2x - \sqrt{x^2 + 1}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

(8)

Η g είναι γινσίως αύξουσα στο $[0, \eta]$, ορα $1 < 2 < 3 \Leftrightarrow g(1) < g(2) < g(3)$

$$\left. \begin{array}{l} g(1) \leq g(1) < g(3) \\ g(1) < g(2) < g(3) \\ g(1) < g(3) \leq g(3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτω κατά μέλη, ορα} \\ 3g(1) < g(1) + g(2) + g(3) < g(3) \Leftrightarrow \\ g(1) < \frac{g(1) + g(2) + g(3)}{3} < g(3) \end{array}$$

g συνεχής στο $[1, 3]$ (αρα f συνεχής) και

$$g(1) < \frac{g(1) + g(2) + g(3)}{3} < g(3), \text{ ορα στο Θεώρημα}$$

Ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 3)$

$$\text{Τέτοιο ώστε } g(x_0) = \frac{g(1) + g(2) + g(3)}{3} = \frac{e + \eta \mu 1 + 2e^2 + \eta \mu 2 + 3e^3 + \eta \mu 3}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3g(x_0) = e + 2e^2 + 3e^3 + \eta \mu 1 + \eta \mu 2 + \eta \mu 3.$$

Ορα g γινσίως αυφουσα στο $[1, 3]$, ορα το x_0 είναι μοναδικό

$\Delta 3. \alpha)$ Η g είναι συνεχής στο $(0, \eta]$ και στο $(-\infty, 0)$, ως ραίτις και
συνάρτηση συνεχών

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 2x - \sqrt{x^2 + 1}) = 1 - 0 - 1 = 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^x + \eta \mu x) = 0 \\ \cdot g(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

ορα g συνεχής
στο $x_0 = 0$

Ενρίμεως g συνεχής στο $(-\infty, \eta]$

- g συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$, ορα

$$g(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right) = (0, +\infty) \quad , \text{αφού:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - 2x - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - 2x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - 2x - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - 2x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{x} - 2 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty \quad , \text{διότι} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{αρα} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - 2 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0 - 2 + 1 = -1$$

$$\text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty.$$

- g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0, \pi]$, ορα

$$g(\Delta_2) = [g(0), g(\pi)] = [0, \pi e^\pi]$$

$$\text{Άρα} \quad g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = [0, +\infty).$$

β) Ισχύει ότι $\pi^{\pi+1} > \pi \cdot e^\pi$, διότι

$$\begin{aligned} \pi^{\pi+1} > \pi \cdot e^\pi &\stackrel{\text{λη1}}{\iff} \ln \pi^{\pi+1} > \ln(\pi \cdot e^\pi) \iff (\pi+1) \ln \pi > \ln \pi + \pi \ln e \\ &\iff \pi \ln \pi + \ln \pi > \ln \pi + \pi \ln e \iff \pi \ln \pi > \pi \ln e \\ &\iff \ln \pi > \ln e \stackrel{\text{λη1}}{\iff} \pi > e \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

- $\pi^{\pi+1} \in g(\Delta_1)$ και $g \downarrow$ στο Δ_1 , ορα η εφιστροφή $g(x) = \pi^{\pi+1}$ έχει μοναδική ρίζα p , με $p \in (-\infty, 0)$.

- $\pi^{\pi+1} \notin g(\Delta_2)$, ορα η εφιστροφή $g(x) = \pi^{\pi+1}$ είναι αδύνατη στο $\Delta_2 = [0, \pi]$.

Επομένως η εφιστροφή $g(x) = \pi^{\pi+1}$ έχει μοναδική ρίζα p .

Δ4. $g \downarrow$ στο $\Delta_1 = (\infty, 0)$ και $p \in \Delta_1$ με $g(p) = \pi^{n+1}$

• κοιτά στο p^- , $x < p \xrightarrow{g \downarrow} g(x) > g(p) \Leftrightarrow g(x) - \pi^{n+1} > 0$

• $x - p < 0$, ορα $(g(x) - \pi^{n+1})(x - p) < 0$

και $\lim_{x \rightarrow p^-} [(g(x) - \pi^{n+1})(x - p)] = 0$ ορα $\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{1}{(g(x) - \pi^{n+1})(x - p)} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow p} (p) = p < 0$ επομένως $\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{p}{(g(x) - \pi^{n+1})(x - p)} = +\infty$ (3)

• κοιτά στο p^+ , $x > p \xrightarrow{g \downarrow} g(x) < g(p) \Leftrightarrow g(x) - \pi^{n+1} < 0$

$x - p > 0$ ορα $(g(x) - \pi^{n+1})(x - p) < 0$

και $\lim_{x \rightarrow p^+} [(g(x) - \pi^{n+1})(x - p)] = 0$ ορα $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{1}{(g(x) - \pi^{n+1})(x - p)} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow p^+} (p) = p < 0$ επομένως $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{p}{(g(x) - \pi^{n+1})(x - p)} = +\infty$ (4)

Απο (3), (4) έχουμε ότι $\boxed{M = +\infty}$.