

Λύσεις Μαθηματικών Προσανατολισμού
Γ' Λυκείου

02 Ιουνίου 2025.

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 186

A2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 76

A3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 161

A4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ



αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Β

B1. $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 3$, $Df = \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $Df = \mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, άρα από Θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + 9 = 0$
 $\Leftrightarrow 2a = -12 \Leftrightarrow \boxed{a = -6}$

B2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $Df = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3.$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f					

• $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 1)$
 f συνεχής στο 1 } $f \uparrow$ στο $(-\infty, 1]$.

• $f'(x) < 0$ στο $(1, 3)$
 f συνεχής στο 3 } $f \downarrow$ στο $[1, 3]$

• $f'(x) > 0$ στο $(3, +\infty)$
 f συνεχής στο 3 } $f \uparrow$ στο $[3, +\infty)$.



αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΠΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

- Η f στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα
ορα $f(\Delta_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)]$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

$$f(1) = 1 \quad \text{ορα} \quad \boxed{f(\Delta_1) = (-\infty, 1]}.$$

- Η f στο $\Delta_2 = (1, 3]$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα
ορα $f(\Delta_2) = [f(3), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x))$.

$$f(3) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1, \quad \text{ορα} \quad f \text{ συνεχής στο } x_0 = 1$$

$$\text{ορα} \quad \boxed{f(\Delta_2) = [-3, 1)}$$

- Η f στο $\Delta_3 = (3, +\infty)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα
ορα $f(\Delta_3) = (\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = -3, \quad \text{ορα} \quad f \text{ συνεχής στο } x_0 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\text{ορα} \quad \boxed{f(\Delta_3) = (-3, +\infty)}$$



αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

- Το $0 \in (-\infty, 1] = f(\Delta_1)$, επομένως υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ ώστε $f(x_1) = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$, το x_1 είναι η μόνη ρίζα της f στο διάστημα αυτό.
- Το $0 \in [-3, 1) = f(\Delta_2)$, επομένως υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ ώστε $f(x_2) = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = (1, 3]$, το x_2 είναι η μόνη ρίζα της f στο διάστημα αυτό.
- Το $0 \in (-3, +\infty) = f(\Delta_3)$, επομένως υπάρχει $x_3 \in \Delta_3$ ώστε $f(x_3) = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3 = (3, +\infty)$, το x_3 είναι η μόνη ρίζα της f στο διάστημα αυτό.

Επειδή οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 ανήκουν σε ξένα διαστήματα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

Παρατηρούμε ότι $x_2 \in \Delta_2 \Rightarrow x_2 > 0$ και $x_3 \in \Delta_3 \Rightarrow x_3 > 0$.

Επιπλέον, $-3 < 0 < 1 \iff f(0) < f(x_1) < f(1)$

Όπως f γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ και $0, x_1, 1 \in \Delta_1$ άρα $0 < x_1 < 1$ επομένως και η τρίτη ρίζα είναι θετική. Τέλος η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις θετικές ρίζες.



Ραξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

B3. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνόμιο με

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2), x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6(x-2) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6(x-2) < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 2 και $f''(x) > 0$ στο $(2, +\infty)$ και $f''(x) < 0$ στο $(-\infty, 2)$, έχουμε ότι:

f κοίτη στο $(-\infty, 2]$, f κυρτή στο $[2, +\infty)$ και η C_f έχει σημείο στροφής το $K(2, f(2)) \equiv K(2, -1)$ αφού η C_f δεχεται εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

B4. Η εφαπτομένη ε_1 της C στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$
έχει εξίσωση

$$\varepsilon_1: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \quad (1)$$

Η g είναι παραχρησμένη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 1 + f'(x)$.

Η εφαπτομένη ε_2 της C στο σημείο $B(\xi, g(\xi))$
έχει εξίσωση

$$\varepsilon_2: y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) \quad (2)$$

Για να βρούμε το σημείο κομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ λύναμε
το σύστημα των (1), (2)

$$f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) \Leftrightarrow$$

$$(x - \xi)(f'(\xi) - g'(\xi)) = g(\xi) - f(\xi) \Leftrightarrow$$

$$(x - \xi)(-1) = \xi \Leftrightarrow x - \xi = -\xi \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται πάντοτε στον άξονα $y'y$



αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \eta \mu x) = e^0 \cdot \eta \mu 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{0^2 + 0} = 0$$

$$f(0) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$
Επομένως f
συνεχίζεται στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cdot \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \frac{\eta \mu x}{x} = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\text{Διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.



αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Γ2. Στο $(-\infty, 0)$ η $f(x) = e^x \cdot \ln x$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών.

Στο $(0, +\infty)$, η $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ είναι συνεχής ως ρίζα πολυωνυμικής.

Από Γ1. Συνεχής στο $x_0 = 0$, ζεδιάει η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως η f δεν έχει καταστροφής ασυμπτωτής.

• Στο $-\infty$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \ln x) = 0$, αφού

$$\text{για } x < 0, |e^x \cdot \ln x| = |e^x| \cdot |\ln x| \leq e^x \cdot 1 = e^x$$

$$\text{αρα } |e^x \cdot \ln x| \leq e^x \iff -e^x \leq e^x \cdot \ln x \leq e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) \text{ αρα από τερσίριο}$$

$$\text{Πορτμωζίς } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \ln x) = 0.$$

Άρα η ευθεία $y=0$ είναι ορίζοντια ασυμπτωτή της f στο $-\infty$.

$$\begin{aligned} \text{Στο } +\infty, \text{ έχουμε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1, \text{ αρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{τα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

Άρα η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι η άσκηση ασύμπτωτη της C στο $+\infty$.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η ϵ -ξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2}$ (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-\pi, 0)$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $K(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$, $x \in [-\pi, 0]$.

• K είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$, ως άθροισμα συνεχών.

$$K(-\pi) = f(-\pi) - \pi - \frac{1}{2} = e^{-\pi} \cdot \pi \cdot (-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$K(0) = f(0) - 0 - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0.$$

• $K(-\pi) \cdot K(0) < 0$

* Άρα από Θεώρημα Bolzano η ϵ -ξίσωση $K(x) = 0$ (2) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-\pi, 0)$.



αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Γ4. Για $x \geq 0$ έχουμε $y = \sqrt{x^2 + x}$.

Επειδή το x μεταβάλλεται με το χρόνο, το ίδιο ισχύει και με το y , ορα $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, $t \geq 0$

Ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς το χρόνο t , είναι
$$y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}, \quad t > 0 \quad (*)$$

Αν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 > 0$ ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$
τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\frac{2x(t_0) \cdot x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = x'(t_0) \iff$$

$$\cancel{x'(t_0)}(2x(t_0) + 1) = \cancel{x'(t_0)} \cdot 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \quad \xLeftrightarrow{x'(t_0) > 0}$$

$$2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \quad \xLeftrightarrow[\text{και τα δύο μέλη με δύναμη 2}]{}$$

$$4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) \iff 1 = 0 \text{ άτοπο.}$$

Επομένως δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 > 0$ τέτοια
ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$.

(*) Για $t=0$, η συνάρτηση $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$ δεν είναι παραγωγίσιμη.
όπως προκύπτει από το Γ1.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως συνάρτηση παραγωγίσιμων με

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^{4x}} \right)' = \frac{f'(x) \cdot e^{4x} - f(x) \cdot (e^{4x})'}{(e^{4x})^2}$$

$$= \frac{f(x) \cdot x^{4x} - f(x) \cdot e^{4x} \cdot \left(\frac{2e^{4x}}{x} \right)}{(x^{4x})^2}$$

$$= \frac{x^{4x} \left(f(x) - f(x) \cdot \frac{2e^{4x}}{x} \right)}{(x^{4x})^2}$$

$$= \frac{x f(x) - 2f(x)e^{4x}}{x \cdot x^{4x}} = 0$$

Αφού $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, η g είναι σταθερή.



αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Δ2. i) Η εφαιτομένη ε_1 της C στο σημείο $M(1, f(1))$ έχει τμήμα $\lambda_1 = f'(1)$

Η ευθεία ε έχει τμήμα $\lambda = 2$.

Αρα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon$ θα ισχύει ότι $\lambda_1 = \lambda \Leftrightarrow \boxed{f'(1) = 2}$.

Για κάθε $x > 0$, $x f(x) = 2 f(x) \ln x$ (*)

Για $x=1$, η (*) γράφεται $1 \cdot f(1) = 2 f(1) \cdot \ln 1 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = 0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{\ln x} \cdot \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$\text{Διότι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.}}{=}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 2.$$

ii) Η f είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, στο $(0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x f(x)}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \Rightarrow \boxed{f(1) = 1} \end{aligned}$$

Από Δ1. g σταθερή στο $(0, +\infty)$ $\Leftrightarrow$ υπάρχει $c \in \mathbb{R}$

$$\text{ώστε } g(x) = c \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x \ln x} = c, \quad x \in (0, +\infty). \quad (2)$$



αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Για $x=1$, η (2) γράφεται $\frac{F(1)}{1^0} = c \Leftrightarrow \boxed{c=1}$

Άρα $g(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=x^{\ln x}, x \in (0, \infty)$.

Δ3. Η F είναι συνεχής στο $(0, \infty)$ και παραγωγίσιμη με:

$$F'(x) = (x^{\ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = \frac{x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x}$$

$$F'(x) = \frac{2x^{\ln x}}{x} \cdot \ln x, x > 0$$

Άρα $\frac{2x^{\ln x}}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$, το πρόσημο και οι ρίζες

$\Rightarrow F'$ συμπίπτει με το πρόσημο και τη ρίζα του $\ln x$.

$$\bullet F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\bullet F'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\bullet F'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

x	0	1	∞
$F'(x)$		- 0 +	
F		$\nearrow$ $\searrow$	
		$\boxed{F(1)=1}$	

$\bullet F'(x) < 0$ στο $(0, 1)$
 F συνεχής στο $(0, 1]$ } $F \downarrow$ στο $(0, 1]$.

$\bullet F'(x) > 0$ στο $(1, \infty)$
 F συνεχής στο $[1, \infty)$ } $F \uparrow$ στο $[1, \infty)$.



αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ η εξίσωση γράφεται :

$$(F(x^2) - F(x)) + (x-1)^2 = 0. \quad (3).$$

Για $x=1$, η (3) γίνεται $(F(1) - F(1)) + (1-1)^2 = 0$ που ισχύει.

Για $x > 1$, έχουμε: $x^2 > x > 1 \xrightarrow{F \uparrow} F(x^2) > F(x)$
 $\Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$
και $(x-1)^2 > 0$ } $\Rightarrow$

$(F(x^2) - F(x)) + (x-1)^2 > 0$ άρα η (3) είναι αδύνατη

Για $0 < x < 1$ έχουμε: $0 < x^2 < x < 1 \xrightarrow{F \downarrow} F(x^2) > F(x)$
 $\Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$
και $(x-1)^2 > 0$ } $\Rightarrow$

$(F(x^2) - F(x)) + (x-1)^2 > 0$ άρα η (3) είναι αδύνατη

Τελικά η εξίσωση (3) έχει μοναδική λύση
στην $x=1$.



αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Δ4. Από Δ3. έχουμε, για κάθε $x \in [1, e]$, ότι
 $1 \leq x \xrightarrow{F1} F(1) \leq F(x) \Rightarrow F(x) \geq 1$

Άρα τα τριγώνω εμβαδόν είναι:

$$E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e x^{\ln x} dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx.$$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει σε: $\ln x \leq x-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

Άρα αν θέσουμε όπου x το $e^{\ln^2 x} > 0$, έχουμε:

$$\ln e^{\ln^2 x} \leq e^{\ln^2 x} - 1, \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και η ισότητα}$$

$$\text{ισχύει μόνο για } e^{\ln^2 x} = 1 \Leftrightarrow \ln^2 x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Άρα $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ για κάθε $x > 0$, και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

Επομένως οι συναρτήσεις, $e^{\ln^2 x}$ και $\ln^2 x + 1$ είναι γνωστός

$$\text{εφαπτόμενος } \int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx$$

$$\int_1^e \ln^2 x dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= e - \int_1^e 2 \ln x dx = e - \int_1^e (2x)' \ln x dx = e - [2x \ln x]_1^e + \int_1^e 2x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= e - 2e + \int_1^e 2 dx = -e + [2x]_1^e = -e + 2e - 2 = e - 2.$$

$$\cdot \int_1^e \frac{1}{x} dx = e - 1.$$

$$\text{Άρα } E > e^{-2} + e^{-1} \Leftrightarrow E > 2e^{-3}.$$

