αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Λύσεις Μαθηματικών Προσανατολισμού
Γ' Λυκείου
02 Ιουνίου 2025.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 186

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 76

Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 161

Α4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 3$, $D_f = \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $D_f = \mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, άρα από Θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + 9 = 0$

$\Leftrightarrow 2a = -12 \Leftrightarrow \boxed{a = -6}$

Β2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

• $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 1)$, f συνεχής στο 1 $\Big\}$ $f \uparrow$ στο $(-\infty, 1]$.

• $f'(x) < 0$ στο $(1, 3)$, f συνεχής στο $[1, 3]$ $\Big\}$ $f \downarrow$ στο $[1, 3]$

• $f'(x) > 0$ στο $(3, +\infty)$, f συνεχής στο 3 $\Big\}$ $f \uparrow$ στο $[3, +\infty)$.

· Η f στο $\Delta_1=(-\infty,1]$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

άρα $f(\Delta_1)=(\lim_{x\to-\infty}f(x), f(1)]$.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3-6x^2+9x-3)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

$f(1)=1$ άρα $\boxed{f(\Delta_1)=(-\infty,1].}$

· Η f στο $\Delta_2=(1,3]$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

άρα $f(\Delta_2)=[f(3), \lim_{x\to1^+}f(x))$.

$f(3)=-3$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)=1$, αφού f συνεχής στο $x_0=1$

άρα $\boxed{f(\Delta_2)=[-3,1)}$

· Η f στο $\Delta_3=(3,+\infty)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

άρα $f(\Delta_3)=(\lim_{x\to3^+}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x))$

$\lim_{x\to3^+}f(x)=f(3)=-3$, αφού f συνεχής στο $x_0=3$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3-6x^2+9x-3)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$

άρα $\boxed{f(\Delta_3)=(-3,+\infty)}$

- Το $0 \in (-\infty,1] = f(\Delta_1)$, επομένως υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ ώστε $f(x_1)=0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty,1]$, το x_1 είναι η μόνη ρίζα της f στο διάστημα αυτό.
- Το $0 \in [-3,1) = f(\Delta_2)$, επομένως υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ ώστε $f(x_2)=0$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = (1,3]$, το x_2 είναι η μόνη ρίζα της f στο διάστημα αυτό.
- Το $0 \in (-3,+\infty) = f(\Delta_3)$, επομένως υπάρχει $x_3 \in \Delta_3$ ώστε $f(x_3)=0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3 = (3,+\infty)$, το x_3 είναι η μόνη ρίζα της f στο διάστημα αυτό.

Επειδή οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 ανήκουν σε ξένα διαστήματα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

Παρατηρούμε ότι $x_2 \in \Delta_2 \Rightarrow x_2 > 0$ και $x_3 \in \Delta_3 \Rightarrow x_3 > 0$.

Επιπλέον, $-3 < 0 < 1 \Longleftrightarrow f(0) < f(x_1) < f(1)$

Όμως f γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty,1]$ και $0, x_1, 1 \in \Delta_1$

άρα $0 < x_1 < 1$ επομένως και η τρίτη ρίζα είναι θετική.

Τελικά η $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις θετικές ρίζες.

B3. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6(x-2) > 0 \Leftrightarrow x > 2$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6(x-2) < 0 \Leftrightarrow x < 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\smile$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 2 και $f''(x) > 0$ στο $(2, +\infty)$ και $f''(x) < 0$ στο $(-\infty, 2)$, έπεται ότι:

f κοίλη στο $(-\infty, 2]$, f κυρτή στο $[2, +\infty)$ και η C_f έχει σημείο καμπής το $K(2, f(2)) \equiv K(2, -1)$ αφού η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

Β4. Η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon_1: \ y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi) \quad (1)$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 1 + f'(x)$.

Η εφαπτομένη ε_2 της C_f στο σημείο $B(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon_2: \ y - g(\xi) = g'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi)(x-\xi) + g(\xi) \quad (2)$$

Για να βρούμε το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ λύνουμε το σύστημα των (1), (2)

$$f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi) = g'(\xi)(x-\xi) + g(\xi) \Leftrightarrow$$

$$(x-\xi)\left(f'(\xi) - g'(\xi)\right) = g(\xi) - f(\xi) \Leftrightarrow$$

$$(x-\xi)(-1) = \xi \Leftrightarrow x - \xi = -\xi \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = \begin{cases} e^x ημx & , x<0 \\ \sqrt{x^2+x} & , x \geq 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (e^x ημx) = e^0 \cdot ημ0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+x} = \sqrt{0^2+0} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

επομένως f συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x \cdot ημx}{x} = \lim_{x\to 0^-} e^x \cdot \frac{ημx}{x} = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = +\infty$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Στο $(-\infty,0)$ η $f(x)=e^x \cdot ημx$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών.

Στο $(0,+\infty)$, η $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ είναι συνεχής ως ρίζα πολυωνυμικής.

Απο Γ1. συνεχής στο $x_0=0$, τελικά η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

• Στο $-\infty$, έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x \cdot ημx)=0$, αφού

για $x<0$, $|e^x \cdot ημx| = |e^x| \cdot |ημx| \leq e^x \cdot 1 = e^x$

αρα $|e^x \cdot ημx| \leq e^x \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \cdot ημx \leq e^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x)$ αρα απο κριτήριο

Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x \cdot ημx)=0$.

Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζοντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Στο $+\infty$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

Άρα η ευθεία $y=x+\frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=x+\frac{1}{2}$ (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-\pi,0)$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $K(x)=f(x)-x-\frac{1}{2}$, $x\in[-\pi,0]$.

. K είναι συνεχής στο $[-\pi,0]$, ως άθροισμα συνεχών

$K(-\pi)=f(-\pi)-\pi-\frac{1}{2}=e^{-\pi}\cdot\overset{0}{\eta\mu(-\pi)}+\pi-\frac{1}{2}=\pi-\frac{1}{2}>0$

$K(0)=f(0)-0-\frac{1}{2}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$.

$\therefore\ K(-\pi)\cdot K(0)<0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $K(x)=0$ ισοδύναμα η (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-\pi,0)$.

Γ4. Για $x \geq 0$ έχουμε $y = \sqrt{x^2 + x}$.

Επειδή το x μεταβάλλεται με το χρόνο, το ίδιο ισχύει και για το y, άρα $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, $t \geq 0$

Ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς το χρόνο t, είναι

$$y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

Αν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$ τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\frac{2x(t_0) \cdot x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = x'(t_0) \Longleftrightarrow$$

$$\cancel{x'(t_0)}\left(2x(t_0) + 1\right) = \cancel{x'(t_0)} \cdot 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \overset{x'(t_0) > 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \underset{\text{μη αρνητικά}}{\overset{\text{και τα δύο μέλη}}{\Longleftrightarrow}}$$

$$\cancel{4x^2(t_0)} + \cancel{4x(t_0)} + 1 = \cancel{4x^2(t_0)} + \cancel{4x(t_0)} \Longleftrightarrow 1 = 0 \text{ άτοπο.}$$

Επομένως δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$g'(x) = \left(\frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}\right)' = \frac{F'(x)\cdot e^{\ln^2 x} - F(x)\cdot\left(e^{\ln^2 x}\right)'}{\left(e^{\ln^2 x}\right)^2}$$

$$= \frac{f(x)\cdot x^{\ln x} - F(x)\cdot e^{\ln^2 x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right)}{\left(x^{\ln x}\right)^2}$$

$$= \frac{x^{\ln x}\left(f(x) - F(x)\cdot\frac{2\ln x}{x}\right)}{\left(x^{\ln x}\right)^2}$$

$$= \frac{x\cdot f(x) - 2F(x)\ln x}{x\cdot x^{\ln x}} = 0.$$

Αφού $g'(x)=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, η g είναι σταθερή.

Δ2. i) Η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$ έχει κλίση $\lambda_1 = f'(1)$

Η ευθεία ε έχει κλίση $\lambda = 2$.

Αφού $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon$ θα ισχύει ότι $\lambda_1 = \lambda \Leftrightarrow \boxed{f'(1) = 2.}$

Για κάθε $x>0$, $x f(x) = 2F(x)\ln x$ (1)

Για $x=1$, η (1) γράφεται $1\cdot f(1) = 2F(1)\cdot \ln 1 \Leftrightarrow \boxed{f(1)=0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{\ln x}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = 1\cdot 2 = 2$$

διότι $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}(x) = 1$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 2.$

ii) Η F είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, στο $(0,+\infty)$

επομένως $F(1) = \lim_{x\to 1}F(x) \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x f(x)}{2\ln x} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{f(x)}{\ln x}\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 \Rightarrow \boxed{F(1)=1}$

Από Δ1. g σταθερή στο $(0,+\infty)$ άρα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$

ώστε $g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c$, $x\in(0,+\infty)$. (2)

Για $x=1$, η (2) γράφεται $\dfrac{F(1)}{1^0} = c \Leftrightarrow \boxed{c=1}$

Άρα $g(x)=1 \Leftrightarrow F(x)=x^{\ln x}$, $x\in(0,+\infty)$.

Δ3. Η F είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη με:

$$F'(x)=\left(x^{\ln x}\right)'=\left(e^{\ln^2 x}\right)'=e^{\ln^2 x}\cdot\frac{2\ln x}{x}=\frac{x^{\ln x}\cdot 2\ln x}{x}$$

$$F'(x)=\frac{2x^{\ln x}}{x}\cdot\ln x\ ,\ x>0$$

Αφού $\dfrac{2x^{\ln x}}{x}>0$ για κάθε $x>0$, το πρόσημο και οι ρίζες της F' συμπίπτει με το πρόσημο και τη ρίζα του $\ln x$.

- $F'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$
- $F'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow x>1$
- $F'(x)<0 \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
F	‖	↘	$\boxed{F(1)=1}$	↗	

- $F'(x)<0$ στο $(0,1)$, F συνεχής στο $(0,1]$ } $F \downarrow$ στο $(0,1]$.
- $F'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$, F συνεχής στο $[1,+\infty)$ } $F \uparrow$ στο $[1,+\infty)$.

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ η εξίσωση γράφεται:

$$\left(F(x^2)-F(x)\right)+(x-1)^2=0 \quad (3).$$

Για $x=1$, η (3) γίνεται $\left(F(1)-F(1)\right)+(1-1)^2=0$ που ισχύει.

Για $x>1$, έχουμε: $x^2>x>1 \xrightarrow{F\uparrow} F(x^2)>F(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow F(x^2)-F(x)>0 \\ \text{και } (x-1)^2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\left(F(x^2)-F(x)\right)+(x-1)^2>0$ άρα η (3) είναι Αδύνατη

Για $0<x<1$ έχουμε: $0<x^2<x<1 \xrightarrow{F\downarrow} F(x^2)>F(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow F(x^2)-F(x)>0 \\ \text{και } (x-1)^2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\left(F(x^2)-F(x)\right)+(x-1)^2>0$ άρα η (3) είναι Αδύνατη

Τελικά η εξίσωση (3) έχει μοναδική λύση την $x=1$.

Δ4. Απο Δ3. έχουμε, για κάθε $x \in [1,e]$, ότι

$$1 \le x \xrightarrow{F\uparrow} F(1) \le F(x) \Rightarrow F(x) \ge 1$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_1^e |F(x)|dx = \int_1^e F(x)dx = \int_1^e x^{\ln x}dx = \int_1^e e^{\ln^2 x}dx.$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει ότι: $\ln x \le x-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

Άρα αν θέσουμε όπου x το $e^{\ln^2 x} > 0$, έχουμε:

$\ln e^{\ln^2 x} \le e^{\ln^2 x} - 1$, για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $e^{\ln^2 x} = 1 \Leftrightarrow \ln^2 x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Άρα $e^{\ln^2 x} \ge \ln^2 x + 1$ για κάθε $x>0$, και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

Επιπλέον οι συναρτήσεις, $e^{\ln^2 x}$ και $\ln^2 x + 1$ είναι συνεχείς

επομένως $\int_1^e e^{\ln^2 x}dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1)dx = \int_1^e \ln^2 x\,dx + \int_1^e 1\,dx$

• $\int_1^e \ln^2 x\,dx = \int_1^e (x)'\ln^2 x\,dx = [x\ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx =$

$= e - \int_1^e 2\ln x\,dx = e - \int_1^e (2x)'\ln x\,dx = e - [2x\ln x]_1^e + \int_1^e 2x \cdot \frac{1}{x}dx$

$= e - 2e + \int_1^e 2\,dx = -e + [2x]_1^e = -e + 2e - 2 = e - 2.$

- $\int_1^e \frac{1}{x} dx = e-1.$

Άρα $E > e-2+e-1 \Leftrightarrow E > 2e-3$.