ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ (σελ 93)

A_2 ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ (σελ 16)

A_3.
α) Λ
β) Σ
γ) Σ
δ) Σ
ε) Λ

A_4. α) $(c)' = 0$
β) $(x^2)' = 2 \cdot x$

ΘΕΜΑ Β

B_1. $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu \iff$

$\nu_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50 \iff$

$\nu_1 + 40 = 50 \iff$

$\boxed{\nu_1 = 10}$

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	$v=50$	100	

B2. $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot v_i}{v} = \frac{0\cdot 10 + 1\cdot 15 + 2\cdot 11 + 3\cdot 8 + 4\cdot 6}{50}$$

$$= \frac{85}{50} = 1,7$$

Άρα $\boxed{\bar{x} = 1,7}$

B3. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο ($v=50$), άρα η διάμεσος είναι:

$$\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Άρα $\boxed{\delta = 1,5}$

Β4. α) $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 20\% + 30\% + 22\% + 16\%$
$= 88\%$

β) Αν x_i, $i=1,2,3,4,5$ είναι οι αρχικές τιμές των υπερωριών,
και y_i, $i=1,2,3,4,5$ είναι οι τιμές των υπερωριών μετά την αύξηση κατά 4 ώρες

τότε $y_i = x_i + 4$, $i=1,2,3,4,5$

Επομένως: $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7$

$$\boxed{\bar{y} = 5,7}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$ και α πραγματική σταθερά

$f'(x) = -6x^2 + 12 \cdot x = -6x \cdot (x-2)$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \iff -6x \cdot (x-2) = 0 \iff x = 0$ ή $x = 2$

Οι ρίζες και το πρόσημο της f' καθώς και η μονοτονία της f, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		

- f γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$
- f γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$

Γ2. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1=0$ το $f(0)=\alpha$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2=2$ το $f(2)=\alpha+8$

Επομένως, $\dfrac{f(0)+f(2)}{2}=-8 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha+\alpha+8}{2}=-8 \Leftrightarrow$

$$\frac{\cancel{2}\cdot(\alpha+4)}{\cancel{2}}=-8 \Leftrightarrow$$

$$\alpha+4=-8 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\alpha=-12}$$

Για $\alpha=-12$, έχουμε: $f(x)=-2\cdot x^3+6\cdot x^2-12$

$$f'(x)=-6x^2+12\cdot x$$

Γ3. Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι της μορφής:

$y=\lambda\cdot x+\beta$.

$\lambda=f'(1)=-6\cdot 1^2+12\cdot 1=-6+12=6$, άρα $\boxed{\lambda=6}$

Άρα $y=6\cdot x+\beta$

Επειδή η (ε) διέρχεται από το $M(1,f(1))$ έχουμε: $f(1)=6\cdot 1+\beta \Leftrightarrow -2+\cancel{6}-12=\cancel{6}+\beta \Leftrightarrow$

$$\boxed{\beta=-14}$$

Τελικά (ε): $y=6\cdot x-14$

Γ4. Για κάθε $x \in [2,+\infty)$ ισχύει:

$$x \geq 2 \overset{f \downarrow}{\Longleftrightarrow} f(x) \leq f(2) \Longleftrightarrow$$
$$-2x^3+6x^2-12 \leq -4 \Longleftrightarrow$$
$$-2\cdot x^3+6\cdot x^2-12+4 \leq 0 \overset{:(-2)}{\Longleftrightarrow}$$
$$-2\cdot x^3+6x^2-8 \leq 0$$
$$x^3-3x^2+4 \geq 0$$

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3+\lambda\cdot x^2+7\cdot x+\frac{2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ και λ πραγματική σταθερά.

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x)=x^2+2\cdot\lambda\cdot x+7 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) = 1^2+2\lambda\cdot 1+7 = 2\lambda+8$$

Άρα: $2\lambda+8=0 \Longleftrightarrow 2\lambda=-8 \Longleftrightarrow \boxed{\lambda=-4}$

Επομένως: $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3-4\cdot x^2+7x+\frac{2}{3}$, $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=x^2-8x+7$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. $f'(x)=0 \Longleftrightarrow x^2-8x+7=0 \Longleftrightarrow (x-1)\cdot(x-7)=0 \Longleftrightarrow$
$\boxed{x=1}$ ή $\boxed{x=7}$

Οι ρίζες και το πρόσημο της f', καθώς και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[7, +\infty)$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 7]$

Δ3. • Αφού $2020, 2025 \in [7, +\infty)$ όπου η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει:

$$2020 < 2025 \Longleftrightarrow f(2020) < f(2025) \Longleftrightarrow$$
$$f(2025) - f(2020) > 0 \quad (1)$$

Αντίστοιχα, $\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in [1, 7]$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \Longleftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Longleftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0 \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\boxed{A > 0}$

Δ4. $f'(x) = x^2 - 8x + 7$

$f''(x) = 2\cdot x - 8$

<u>Άρα</u>

$$\lim_{x\to 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 10\cdot x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x-8)\cdot(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})\cdot(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x-8)\cdot(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x-8)\cdot(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\cancel{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} (x-8)\cdot(\sqrt{x+1} + \sqrt{3}) =$$

$$= (2-8)\cdot(\sqrt{2+1} + \sqrt{3}) =$$

$$= -6\cdot 2\cdot\sqrt{3} = -12\cdot\sqrt{3}$$