

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_a^b f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

(Μονάδες 7)

- A2.** Έστω f, g δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A και B αντιστοίχως. Να ορίσετε τη σύνθεση της f με την g .

(Μονάδες 3)

- A3.** Να διατυπώσετε το **θεώρημα Fermat**.

(Μονάδες 3)

- A4.** Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και υπάρχει x_0 στο εσωτερικό του Δ ώστε $f''(x_0) = 0$, τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f ».

Να χαρακτηρίσετε ως σωστό ή λανθασμένο τον παραπάνω ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 1+3)

- A5.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- α)** Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, τότε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = x$ ταυτίζονται με τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$. **Σ Λ**

- β)** Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty$ **Σ Λ**

- γ)** Η εφαπτομένη της C_f σε οποιοδήποτε σημείο ενός διαστήματος Δ στο οποίο η συνάρτηση f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής. **Σ Λ**

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Σ Λ

(Μονάδες 2x4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $g(x) = \ln(1 - x)$, $x \in (-\infty, 1)$
- $h(x) = \ln \frac{x}{1-x}$, $x \in (0, 1)$

B1. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1} .

Αν $g^{-1}(x) = 1 - e^x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

B2. Να ορίσετε την hog^{-1} .

Αν $f(x) = (hog^{-1})(x) = \ln(1 - e^x) - x$, $x \in (-\infty, 0)$, τότε:

B3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

B4. i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

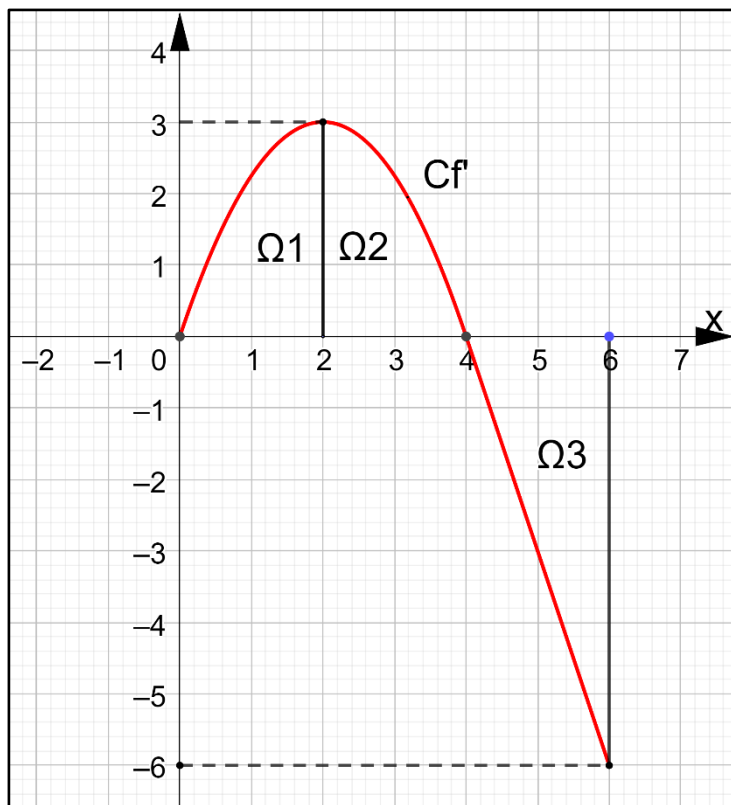
(Μονάδες 5x5)

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $[0, 6]$ και είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $f(0) = 0$.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της **παραγώγου f'** της συνάρτησης f . Επιπλέον δίνεται ότι:

- το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$, τη γραφική παράσταση της f' και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega_1) = 4$ τ.μ.
- το εμβαδόν του χωρίου Ω_2 που περικλείεται από τις ευθείες $x = 2$, $x = 4$, τη γραφική παράσταση της f' και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega_2) = 4$ τ.μ.
- το εμβαδόν του χωρίου Ω_3 που περικλείεται από τις ευθείες $x = 4$, $x = 6$, τη γραφική παράσταση της f' και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega_3) = 6$ τ.μ.



$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = 4$$

$$E(\Omega_3) = 6$$

$$f(0) = 0$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(2) = 4$, $f(4) = 8$, $f(6) = 2$.

(Μονάδες 4)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 5)

Γ3. (i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(ii) Να βρείτε την $f''(2)$ και να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)-3}{f(x)-4}$

(iii) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < 3x - 2$

(Μονάδες 3x4)

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x) + f(2^x) = 16$

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

Για τον πραγματικό αριθμό a και τη συνεχή συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

- $a \in [0, 1]$
- $(e + a)^x + (e - a)^{-x} \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\int_0^1 |e^x \cdot f(x) - 1| dx = a$

Δ1.(i) Να δείξετε ότι $\alpha = 0$

(ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 1]$.

(Μονάδες 5+5)

Αν δίνεται ότι: $f(x) = e^{-x}, x \in [0, +\infty)$

$$\text{και } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-1}{x}, & x > 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

Δ2.(i) Να εξηγήσετε γιατί ορίζεται **αρχική** G της συνάρτησης g στο $[0, +\infty)$.

(ii) Να βρείτε την κυρτότητα της συνάρτησης G .

(Μονάδες 2+5)

Αν επιπλέον $G(1) = 1 + \frac{1}{e}$, τότε

Δ3. Να δείξετε ότι:

$$G(0) > \int_0^{\pi/4} \frac{G(\varepsilon\varphi(x))}{\sin^2(x)} dx > \frac{3e+1}{2e}$$

(Μονάδες 4+4)

Καλή Εισαγωγή !

(*) Το παρόν κριτήριο εξέτασης συντάχθηκε από την ομάδα διδασκόντων του Τομέα Μαθηματικών του Φροντιστηρίου αξία και αποτελεί πνευματική τους ιδιοκτησία.

Η χρήση τους εκτός Φροντιστηρίου, επιτρέπεται μόνο για εκπαιδευτικούς σκοπούς. Οποιαδήποτε άλλη χρήση ή αναπαραγωγή χωρίς άδεια, μπορεί να επιφέρει τις προβλεπόμενες από το Νόμο κυρώσεις.