

ΛΥΣΕΙΣ 7ου ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

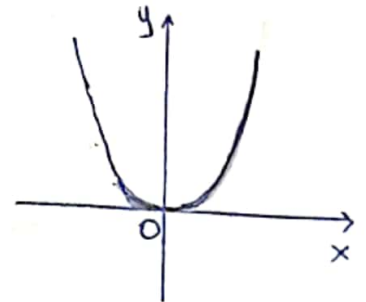
A1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 216-217.

A2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 25

A3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 142

A4. Ο ισχυρισμός είναι Λανθασμένος.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 12x^2$. Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει ρίζα το 0 όμως το σημείο $A(0, f(0))$ δεν είναι σημείο καμπής, αφού η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.



A5. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση $g(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με $g'(x) = -\frac{1}{1-x} < 0$ για κάθε $x < 1$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$, οπότε η g είναι συνάρτηση 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

Για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ έχουμε $g(x) = y \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$

$$g(x) = y \Leftrightarrow \ln(1-x) = y \Leftrightarrow 1-x = e^y \Leftrightarrow x = 1-e^y, y \in \mathbb{R}$$

αρα $g^{-1}(y) = 1-e^y$, $y \in \mathbb{R}$ και αν θέσω όπου y το x έχουμε τελικά $g^{-1}(x) = 1-e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

B2. $D_{h \circ g^{-1}} = \{x \in D_{g^{-1}} \text{ και } g^{-1}(x) \in D_h\}$ συνεπώς
 $x \in \mathbb{R}$ και $0 < 1-e^x < 1 \Leftrightarrow -1 < -e^x < 0 \Leftrightarrow$
 $0 < e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

Άρα η $h \circ g^{-1}$ έχει πεδίο ορισμού $D_{h \circ g^{-1}} = (-\infty, 0)$
 και είναι $(h \circ g^{-1})(x) = h(g^{-1}(x)) = h(1-e^x) = \ln \frac{1-e^x}{1-1+e^x}$
 $(h \circ g^{-1})(x) = \ln(1-e^x) - \ln e^x = \ln(1-e^x) - x$, $x < 0$.

B3. $f(x) = \ln(1-e^x) - x$, $x < 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και σύνθεση παραγωγίσιμων συντελεστών με:

$$f'(x) = \frac{-e^x}{1-e^x} - 1 = \frac{-e^x - 1 + e^x}{1-e^x} = \frac{-1}{1-e^x} < 0 \text{ για } x < 0$$

αρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty, 0)$.

f' παραγωγίζεται ως πράξις παραγωγίζεται με

$$f''(x) = \frac{-e^x}{(1-e^x)^2} < 0 \text{ για κάθε } x < 0$$

Άρα η f είναι κοίτη στο $Df = (-\infty, 0)$.

B4. i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln(1-e^x) - x) = -\infty$, διότι

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(1-e^x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^-]{1-e^x=u} \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$

Άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(1-e^x)}{x} - 1 \right) = -1$ αφά $\alpha = -1$

διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-e^x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{u=1-e^x} \lim_{u \rightarrow 1} (\ln u) = 0$

και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

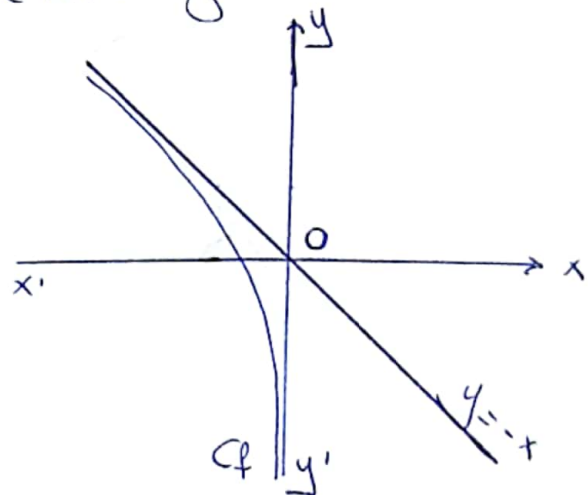
άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(1-e^x) = 0 \cdot 0 = 0$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \alpha x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1-e^x) - x + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-e^x) = 0$
άρα $\beta = 0$

Επομένως στο $-\infty$ η Cf έχει μόνη ασύμπτωτη την $y = -x$.

ii)

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	-	
$f''(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$



ΘΕΜΑ Γ

4

$$\Gamma 1. \quad E(\underline{0}_1) = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 f'(x) dx = 4 \Leftrightarrow [f(x)]_0^2 = 4 \\ \Leftrightarrow f(2) - f(0) = 4 \Leftrightarrow \boxed{f(2) = 4}$$

$$E(\underline{0}_2) = 4 \Leftrightarrow \int_2^4 f'(x) dx = 4 \Leftrightarrow [f(x)]_2^4 = 4 \\ \Leftrightarrow f(4) - f(2) = 4 \Leftrightarrow \boxed{f(4) = 8}$$

$$E(\underline{0}_3) = 6 \Leftrightarrow \int_4^6 -f'(x) dx = 6 \Leftrightarrow [-f(x)]_4^6 = 6 \\ \Leftrightarrow -f(6) + f(4) = 6 \Leftrightarrow \boxed{f(6) = 2}$$

$\Gamma 2.$ $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 4)$ και f συνεχής στο $[0, 4]$
άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, 4]$.

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (4, 6)$ και f συνεχής στο $[4, 6]$
άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[4, 6]$.

x	0	4	6
$f'(x)$	0	+	-
$f(x)$	0.ε	0.μ	2.ε

Στη θέση $x_1 = 0$ παραβιάζει τονικό
εξάχιστο ίσο με $f(0) = 0$

Στη θέση $x_2 = 4$ παραβιάζει τονικό
μέγιστο ίσο με $f(4) = 8$.

Στη θέση $x_3 = 6$ παραβιάζει τονικό
εξάχιστο ίσο με $f(6) = 2$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = [0, 4]$ άρα
 $f(\Delta_1) = [f(0), f(4)] = [0, 8]$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = (4, 6]$ άρα
 $f(\Delta_2) = [f(6), \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)] = [2, 8)$, διότι $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) = 8$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2)$ άρα $f(\Delta) = [0, 8]$
Ενquiries η f στη θέση $x_1 = 0$ παραβιάζει οντικό εξάχιστο το $f(0) = 0$

(5)

Γ3. i) Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και $f' \uparrow$ στο $(0, 2)$

αρα f κυρτή στο $[0, 2]$

Η f είναι συνεχής στο $[2, 6]$ και $f' \downarrow$ στο $(2, 6)$

αρα f κοίλη στο $[2, 6]$.

Η Cf έχει σημείο ταμίνης το $A(2, f(2))$ δηλ $A(2, 4)$,
διότι f κυρτή στο $[0, 2]$, κοίλη στο $[2, 6]$

και η Cf δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $A(2, f(2))$.

ii) Άνo πi Cf' παρατηρούμε ότι:

- η f' έχει ακρό μέγιστο (αρα και τοπικό) στο $x_0 = 2$
- 2 εσωτερικό σημείο του $[0, 6]$
- f' παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

αρα από Θεώρημα Fermat θα ισχύει ότι $\boxed{f''(2) = 0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - 3}{f(x) - 4} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L'H.}}{=}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{f''(2)}{3} = 0$$

Διότι f'' συνεχής στο 2 άρα $\lim_{x \rightarrow 2} f''(x) = f''(2)$.

iii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο $A(2, f(2))$

$$\text{είναι: } \varepsilon: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = 3(x - 2)$$

$$\text{αρα } \boxed{\varepsilon: y = 3x - 2}$$

• f κυρτή στο $[0, 2]$, άρα η Cf θα βρίσκεται πάνω από
των εφαπτομένη ε , με εξαίρεση το σημείο επαφής
δυσάδω, $f(x) \geq 3x - 2$, για κάθε $x \in [0, 2]$ με
των ισότητας να ισχύει μόνο για $x = 2$.

• f κοίλη στο $[2, 6]$, άρα η Cf θα βρίσκεται κάτω
από των εφαπτομένη ε , με εξαίρεση το σημείο
επαφής, δυσάδω $f(x) \leq 3x - 2$, για κάθε $x \in [2, 6]$
με των ισότητας να ισχύει μόνο για $x = 2$
Επομένως $f(x) < 3x - 2 \Leftrightarrow x \in (2, 6]$.

$$\Gamma 4. \quad f(2x) + f(2^x) = 16 \quad (1)$$

6

Το αριστερό μέλος της (1) ορίζεται όταν:

$$2x \in [0, 6] \quad \text{και} \quad 2^x \in [0, 6]$$

$$\cdot \quad 0 \leq 2x \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$$

$$\cdot \quad 0 \leq 2^x \leq 6 \Leftrightarrow 2^x \leq 6 \Leftrightarrow \ln 2^x \leq \ln 6 \Leftrightarrow x \ln 2 \leq \ln 2 + \ln 3$$

$$\xLeftrightarrow{\ln 2 > 0} x \leq \frac{\ln 2 + \ln 3}{\ln 2} \Leftrightarrow x \leq 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Ισχύει ότι $2 < 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2} < 3$, άρα η (1) ορίζεται για $x \in [0, 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}]$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο $\theta \approx x=4$ ίσο με $f(4)=8$, άρα $f(x) \leq f(4) \Leftrightarrow f(x) \leq 8$ για κάθε $x \in [0, 6]$ με την ιδιότητα να ισχύει μόνο για $x=4$.

Η εξίσωση (1) έχει προφανή ρίζα των $x=2$.

• Αν $x \in [0, 2)$ τότε $2x \in [0, 4)$ και $2^x \in [0, 4)$, άρα

$$2x < 4 \xLeftrightarrow[f \uparrow]{[0, 4]} f(2x) < f(4) \Leftrightarrow f(2x) < 8$$

$$2^x < 4 \xLeftrightarrow[f \uparrow]{[0, 4]} f(2^x) < f(4) \Leftrightarrow f(2^x) < 8$$

$$\text{Επομένως} \quad f(2x) + f(2^x) < 16$$

• Αν $x \in (2, 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}]$ τότε $2x > 4$, $2^x > 4$, άρα

$$2x > 4 \xLeftrightarrow[f \downarrow]{[4, 6]} f(2x) < f(4) \Leftrightarrow f(2x) < 8$$

$$2^x > 4 \xLeftrightarrow[f \downarrow]{[4, 6]} f(2^x) < f(4) \Leftrightarrow f(2^x) < 8$$

$$\text{Επομένως} \quad f(2x) + f(2^x) < 16$$

Άρα για $x \in [0, 2) \cup (2, 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}]$ ισχύει $f(2x) + f(2^x) < 16$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα τη $x=2$.

Δ1. i) Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = (e+a)^x + (e-a)^{-x} - 2$
 με $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(7)

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = (e+a)^x \ln(e+a) - (e-a)^{-x} \ln(e-a).$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $h(x) \geq 0 \iff h(x) \geq h(0)$

άρα για την h έχουμε ότι:

- η παραβολή γ_1 ελάχιστο στο $x_0 = 0$
- το 0 είναι ελάχιστο supremum του $\mathbb{R}$
- η παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

άρα από Θεώρημα Fermat ισχύει ότι

$$h'(0) = 0 \iff \ln(e+a) - \ln(e-a) = 0 \iff \ln(e+a) = \ln(e-a) \\ \iff e+a = e-a \iff \boxed{a=0}.$$

ii) Θεωρώ τη συνάρτηση $\varphi(x) = |e^x f(x) - 1|$, $x \in [0,1]$

η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως σύνθεση και
 σύνθεσης συνεχών, $\varphi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0.$$

Εάν υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) > 0$, τότε
 εφόσον φ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και η φ δεν είναι παντού
 μηδέν στο $[0,1]$ θα ισχύει ότι $\int_0^1 \varphi(x) dx > 0$, άτοπο.

$$\text{Άρα } \varphi(x) = 0 \iff |e^x f(x) - 1| = 0 \iff e^x f(x) - 1 = 0 \\ \iff e^x f(x) = 1 \iff \boxed{f(x) = e^{-x}, x \in [0,1]}$$

$$\Delta 2. \quad g(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}-1}{x}, & x > 0 \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

8

$$Dg = [0, \infty).$$

i) Για να οριστεί αρχική G της συνάρτησης στο $[0, \infty)$ αρκεί να δείξω ότι g συνεχής στο $[0, \infty)$.

• g συνεχής στο $(0, \infty)$ ως ημίτο συνεχών

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-e^{-x}) = -e^0 = -1 = g(0)$$

Ορα g συνεχής στο $x_0=0$, επομένως g συνεχής στο $[0, \infty)$.

ii) Αφού G αρχική της g στο $[0, \infty)$ θα ισχύει ότι $G'(x) = g(x)$, $\mu \in x \in [0, \infty)$.

G' παραγωγίσιμη στο $(0, \infty)$ ως ημίτο και συνεπώς παραγωγίσιμων με:

$$G''(x) = g'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot x - (e^{-x}-1)}{x^2} = \frac{-xe^{-x} - e^{-x} + 1}{x^2}$$

$$G''(x) = \frac{-x-1+e^x}{x^2 \cdot e^x} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \infty), \text{ διότι}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x+1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$
με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Επομένως G συνεχής στο $[0, \infty)$ και $G''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, ορα G κυρτή στο $[0, \infty)$.

$$\Delta 3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{G(\tan x)}{\sec^2 x} dx = \int_0^1 G(u) du = \int_0^1 G(x) dx$$

Δίωξι Θετω $u = \tan x$ ορα $du = \frac{1}{\sec^2 x} dx$

για $x=0$ έχω $u = \tan 0 = 0$

για $x=\frac{\pi}{4}$ έχω $u = \tan \frac{\pi}{4} = 1$.

Αρα ορα να δειψω $G(0) > \int_0^1 G(x) dx > \frac{3e+1}{2e}$.

• Για καψ $x > 0$ έχω: $-x < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow e^{-x} - 1 < 0$
ορα $\frac{e^{-x} - 1}{x} < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow G'(x) < 0$ για $x \in (0, +\infty)$

ταί εφόσον G συνεχής στο $[0, +\infty)$ θα έχουμε ότ
 G γυσιως φθινούσα στο $[0, +\infty)$

Αρα $0 \leq x \leq 1 \xRightarrow{G \downarrow} G(x) \leq G(0)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$, ορα:

$$\int_0^1 G(x) dx < \int_0^1 G(0) dx = [G(0) \cdot x]_0^1 = G(0).$$

ορα $\int_0^1 G(x) dx < G(0)$ (1)

• Η εψίσωση της εφαπτομένης της C_G στο $(1, G(1))$ είναι

$$f: y - G(1) = G'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = G'(1) \cdot x - G'(1) + G(1)$$

$$y = g(1) \cdot x - g(1) + 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{e} - 1\right)x - \frac{1}{e} + 1 + 1 + \frac{1}{e}$$

ορα $f: y = \left(\frac{1}{e} - 1\right)x + 2$.

Αφού G κυρτή στο $[0, \infty)$, η C_G θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (f) με τμήματα το σημείο επαφής.

Άρα $G(x) \geq (\frac{1}{e} - 1)x + 2$ για κάθε $x \in [0, \infty)$ με την ιδιότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, επομένως

$$\int_0^1 G(x) dx > \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{e} - 1 \right) x + 2 \right] dx$$

$$\begin{aligned} \text{με } \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{e} - 1 \right) x + 2 \right] dx &= \left[\left(\frac{1}{e} - 1 \right) \cdot \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{1}{2e} + \frac{3}{2} = \frac{3e+1}{2e} \end{aligned}$$

$$\text{αρα } \int_0^1 G(x) dx > \frac{3e+1}{2e} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2) προκύπτει } G(0) > \int_0^1 G(x) dx > \frac{3e+1}{2e}.$$