

Στο 6^ο κριτήριο εξετάζεται το σύνολο της ύλης.

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f ορίζεται σ' ένα διάστημα Δ και

- η f είναι *συνεχής* στο Δ
- $f'(x) = 0$, για κάθε x στο *εσωτερικό* του Δ

τότε η συνάρτηση f είναι **σταθερή στο Δ** .

(Μονάδες 6)

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά κάνοντας το κατάλληλο σχήμα.

(Μονάδες 2+2)

A3. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο $x_0 \in A$;

(Μονάδες 3)

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Αν η συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f''(x_0) = 0$, τότε υποχρεωτικά το $A(x_0, f(x_0))$ είναι **σημείο καμπής** της C_f ».

Είναι ο παραπάνω ισχυρισμός σωστός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Παίρνετε 1 μονάδα για τη σωστή απάντηση και 3 μονάδες για τη **δικαιολόγησή** της)

(Μονάδες 4)

A5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = l$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -l$. **Σ Λ**

β) Κάθε **ρητή** συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$ της οποίας ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά δύο, τουλάχιστον, μονάδες μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή δεν έχει **κατακόρυφες** ασύμπτωτες.

Σ Λ

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι ίσο με:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$$

Σ Λ

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0,$$

τότε αναγκαστικά $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Σ Λ

(Μονάδες 2x4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\circ h(x) = \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1}}, \quad x \in (1, +\infty)$$

$$\circ g(x) = e^{2x} + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

B1. Να βρείτε την σύνθεση hog .

(Μονάδες 4)

$$\text{Av } k(x) = (hog)(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

B2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση k αντιστρέφεται και να βρείτε την k^{-1} .

(Μονάδες 4)

$$\text{Av } f(x) = k^{-1}(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-\infty, 1)$$

B3. (α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 4+4)

B4. (α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

(β) Να χαράξετε πρόχειρα στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις της f , της f^{-1} και τις ασύμπτωτες αυτών, εφόσον υπάρχουν.

(Μονάδες 4+5)

ΘΕΜΑ Γ

Για τον πραγματικό αριθμό a και τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

- $f(x) = \frac{x^2}{4} + a, x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu 3x}{x} = 3$

Γ1. Να δείξετε ότι $a = 0$.

(Μονάδες 4)

Γ2. Να βρείτε τις εφαπτομένες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της C_f που διέρχονται από το σημείο $\Delta(0, -1)$.

Ποια είναι **τα σημεία επαφής** αυτών των ευθειών με την C_f ;

(Μονάδες 4)

Γ3. (α) Αν $M(x, f(x))$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της C_f , να δείξετε ότι η **απόσταση** του M από το σημείο $\Sigma(3, 0)$ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$D(x) = \sqrt{(x-3)^2 + \frac{x^4}{16}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(β) Να δείξετε ότι το πλησιέστερο σημείο της C_f στο σημείο Σ είναι ένα από τα σημεία επαφής του ερωτήματος Γ2.

(Μονάδες 1+5)

Γ4. Εάν Ω είναι το χωρίο που περικλείεται από την C_f , την ευθεία $y = x - 1$ και τον άξονα $x'x$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του Ω και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ευθεία $x = 1$ χωρίζει το Ω σε δύο **ισεμβαδικά** χωρία.

(Μονάδες 4+2)

Γ5. Να δείξετε ότι **δεν** υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία της C_f που να **ισαπέχουν** από το σημείο $\Sigma(3, 0)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει τύπο:

$$\bullet \quad f(x) = \ln a - 2x + \frac{\ln a}{2} \cdot a^{\frac{-x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{όπου } 0 < a \neq 1$$

Επιπλέον, για την παράγουσα F της f ισχύουν τα εξής:

- $F(2) = 4 - \frac{1}{a}$
- $F(x) \leq 4 - a^{\frac{-x}{2}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. (α) Να δείξετε ότι: $f(x) = 4 - 2x + 2e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$

(β) Να δείξετε ότι: $F(x) = 4x - x^2 - e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 5+4)

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση F είναι κοίλη και έχει ένα μόνο ακρότατο του οποίου η θέση x_0 ανήκει στο διάστημα $(2,3)$. Τί είδους ακρότατο είναι αυτό ;

(Μονάδες 2+4)

Δ3. Αν ρ είναι μία ρίζα της F , να δείξετε ότι:

$$\int_0^{\rho} f'(F(x))F(x)f(x)dx = f(-1) + F(-1) - F(0)$$

(Μονάδες 4)

Αν $g(x) = 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ4. (α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g και τον άξονα $x'x$ είναι ίσο με:

$$E = -\frac{4}{3}x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 + 3$$

(β) Να δείξετε ότι

$$E < \frac{19}{3}$$

(Μονάδες 3+3)

Καλή Εισαγωγή !

(*) Το παρόν κριτήριο εξέτασης συντάχθηκε από την ομάδα διδασκόντων του Τομέα Μαθηματικών του Φροντιστηρίου αξία και αποτελεί πνευματική τους ιδιοκτησία.

Η χρήση τους εκτός Φροντιστηρίου, επιτρέπεται μόνο για εκπαιδευτικούς σκοπούς. Οποιαδήποτε άλλη χρήση ή αναπαραγωγή χωρίς άδεια, μπορεί να επιφέρει τις προβλεπόμενες από το Νόμο κυρώσεις.