

**ΛΥΣΕΙΣ 6ου ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 133
 A2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 128-129
 A3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 140
 A4. Ο ιαχυρισμός είναι Λάθος.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$
 είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = 12x^2$
 και $f''(0) = 0$, όμως η Cf δεν έχει ευθεία
 εφαπτομένη στο $A(0, f(0))$, αφού f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

- A5. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ .

B1. $D_{h \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_h\}$, οπότε πρέπει

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ g(x) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^{2x} + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^{2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

οπότε $D_{h \circ g} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (h \circ g)(x) &= h(g(x)) = \frac{\sqrt{g(x)-1} - 1}{\sqrt{g(x)-1}} = \frac{\sqrt{e^{2x}+1}-1}{\sqrt{e^{2x}+1}} \\ &= \frac{\sqrt{e^{2x}} - 1}{\sqrt{e^{2x}}} = \frac{e^x - 1}{e^x} \text{ οπότε } (h \circ g)(x) = 1 - e^{-x}, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

B2. $k(x) = 1 - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

Η k είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $k'(x) = e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα k γνήσιος αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

$$\begin{cases} k(x) = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - e^{-x} = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x} = 1 - y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, οπότε θα πρέπει $1 - y > 0 \Leftrightarrow y < 1$

$$\text{οπότε } -x = \ln(1-y), y < 1 \Leftrightarrow x = -\ln(1-y), y < 1 \Leftrightarrow$$

$$k^{-1}(y) = -\ln(1-y), y < 1.$$

$$\text{Επομένως } k^{-1}(x) = -\ln(1-x), x < 1.$$

B3. α) $f(x) = -\ln(1-x), x < 1$

Η f είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \frac{1}{1-x} > 0$ για $x < 1$

Άρα η f είναι γνήσιος αύξουσα στο $(-\infty, 1)$ και δεν παρουσιάζει ακρόατα.

β) f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με

$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0 \text{ για } x < 1$$

(3)

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 1)$ και η Cf δεν έχει
 σύμφορο κορυφής.

Β4. α) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-\ln(1-x)] \xrightarrow[\substack{\text{Θέτω } 1-x=u \\ x \rightarrow 1^- \\ u \rightarrow 0^+}]{\substack{\text{D.L.H.} \\ u \rightarrow 0^+}} \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\ln u) = +\infty$

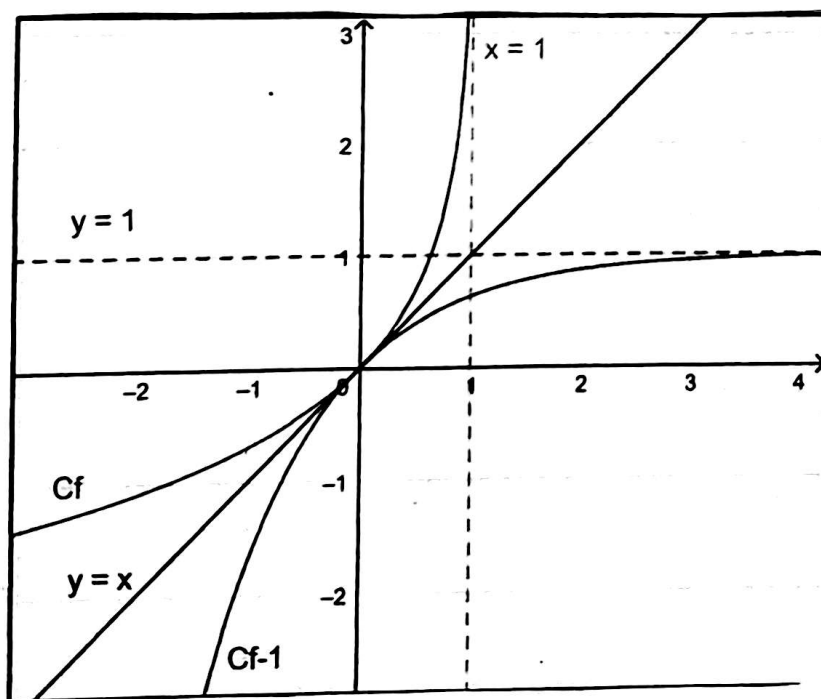
Άρα η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf .

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\ln(1-x)}{x} \xrightarrow[\substack{\text{D.L.H.} \\ x \rightarrow -\infty}]{\substack{-\infty \\ -\infty}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-\ln(1-x)] \xrightarrow[\substack{y \rightarrow +\infty}]{\substack{\text{Θέτω } 1-x=y \\ x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \lim_{y \rightarrow +\infty} (-\ln y) = -\infty$

Άρα η Cf δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

β) Γραφικές Παραστάσεις Cf και Cf^{-1}



ΘΕΜΑ Γ

4

Γ1. Δίδεται συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) + \eta \mu 3x}{x}$, $x \neq 0$ ορα
 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$.

$$f(x) = xg(x) - \eta \mu 3x \text{ ορα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) - \eta \mu 3x) = 0 \cdot 3 - 0 = 0$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, ορα συνεχής και στο $x_0 = 0$
επομένως $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 + a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 0}$.

Γ2. $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{x}{2}$.

Η εφαπτομένη ε της C_f στο τυχαίο σημείο $\Lambda(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in \mathbb{R}$
έχει εξίσωση, $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Η ε διέρχεται από το σημείο $\Delta(0, -1)$ αν και μόνο αν

$$-1 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow 1 + f(x_0) = x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{x_0^2}{4} = \frac{x_0^2}{2} \Leftrightarrow 4 + x_0^2 = 2x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ ή } x_0 = -2$$

Για $x_0 = 2$, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$\varepsilon_1: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 1 = x - 2$$

ορα $\boxed{\varepsilon_1: y = x - 1}$ και το σημείο επαφής είναι $\Lambda_1(2, 1)$.

Για $x_0 = -2$, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$\varepsilon_2: y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \Leftrightarrow y - 1 = -(x + 2)$$

ορα $\boxed{\varepsilon_2: y = -x - 1}$ και το σημείο επαφής είναι $\Lambda_2(-2, 1)$.

(5)

Γ3. α) Η απόσταση των σημείων $M(x, f(x))$ και $Z(3,0)$ είναι: $(MZ) = \sqrt{(3-x)^2 + (0-f(x))^2} \Leftrightarrow$
 $(MZ) = \sqrt{(x-3)^2 + \frac{x^4}{16}}.$

Αρα η απόσταση (MZ) δίνεται από τη συνάρτηση

$$D(x) = \sqrt{(x-3)^2 + \frac{x^4}{16}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Η απόσταση (MZ) γίνεται ελάχιστη, όταν η συνάρτηση $P(x) = (x-3)^2 + \frac{x^4}{16}, \quad x \in \mathbb{R}$, πάρει την ελάχιστη τιμή της.

Για $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 2(x-3) + \frac{x^3}{4} = \frac{x^3 + 8x - 24}{4}$ και $P'(2) = 0$

$P''(x) = \frac{3x^2 + 8}{4} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η P' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

• $P'(x) = 0 \Leftrightarrow P'(x) = P'(2) \xLeftrightarrow^{P' \uparrow \downarrow} x = 2.$

• $P'(x) > 0 \Leftrightarrow P'(x) > P'(2) \xLeftrightarrow^{P' \uparrow} x > 2.$

• $P'(x) < 0 \Leftrightarrow P'(x) < P'(2) \xLeftrightarrow^{P' \uparrow} x < 2$

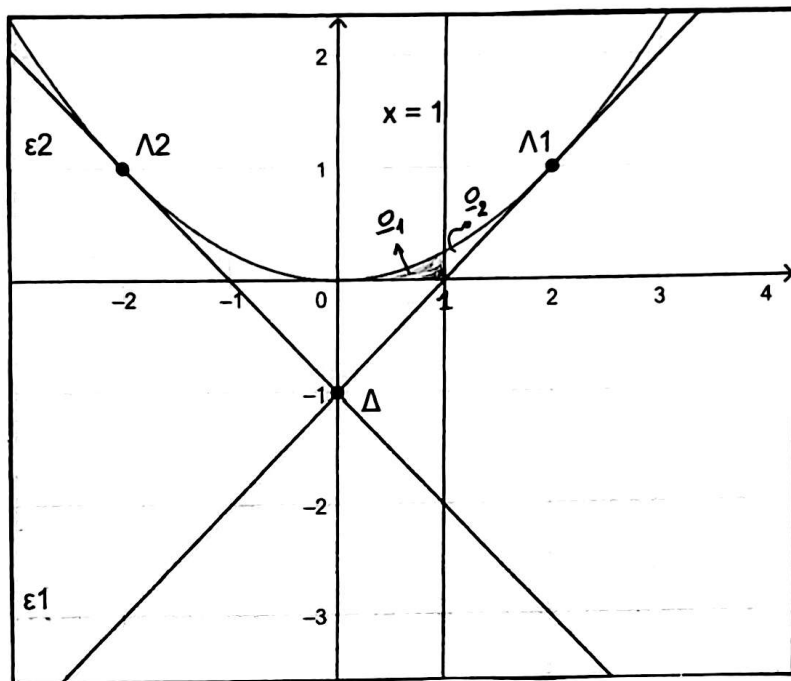
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$P'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
P		$\nwarrow \quad \nearrow$	
		Ο.Ε.	

Η P παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$.

Αρα το συντομότερο σημείο της $\mathcal{C}$ στο σημείο $Z(3,0)$ είναι το σημείο $A(2,1)$.

14) Έστω Ω_1 , το χωρίο που περιλαμβάνεται από τη Γ , των άξονα x και τις ευθείες $x=0$, $x=1$.

Έστω Ω_2 , το χωρίο που περιλαμβάνεται από την Γ , την ευθεία ε_1 , και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.



$$E(\Omega_1) = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \left| \frac{x^2}{4} \right| dx = \int_0^1 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} E(\Omega_2) &= \int_1^2 |f(x) - (x-1)| dx = \int_1^2 \left| \frac{x^2}{4} - x + 1 \right| dx = \int_1^2 \left| \frac{x^2 - 4x + 4}{4} \right| dx \\ &= \int_1^2 \frac{(x-2)^2}{4} dx = \frac{1}{4} \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{4} \cdot \left[0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = \frac{E(\Omega)}{2}$, αφού η ευθεία $x=1$ χωρίζει το Ω σε δύο ισομεταδικά χωρία.

Γ5. Έστω ότι υπάρχουν τρία διαφορετικά συντρίχια της Cf που να ικανοποιούν από το $\Sigma(3, d)$. Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$ ώστε $D(x_1) = P(x_2) = D(x_3)$, επομένως και $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3)$.

- P συνεχής στα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$
- P παραγωγίσιμη στα $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ με $P'(x) = \frac{x^3 + 8x - 24}{4}$
- $P(x_1) = P(x_2)$ και $P(x_2) = P(x_3)$

Αρα από Θεώρημα Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε $P'(\xi_1) = 0$ και $P'(\xi_2) = 0$, άρα διότι από Γ3 β) έχουμε αποδείξει ότι $P' \uparrow$ με μοναδική ρίζα των $x=2$.

Αρα δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συντρίχια της Cf που να ικανοποιούν από το συντρίχιο $\Sigma(3, 0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Έστω F παράγουσα της f , η F παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $F(x) - 4 + a^{-\frac{x}{2}} \leq 0$ (i)

Οεωπάμε συνάρτηση $h(x) = F(x) - 4 + a^{-\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\text{με } h(2) = f(2) - 4 + a^{-1} = 4 - \frac{1}{a} - 4 + \frac{1}{a} = 0$$

Η h είναι παραγωγίσιμη με :

$$h'(x) = F'(x) + a^{-\frac{x}{2}} \ln a \left(-\frac{x}{2}\right)' = f(x) - \frac{\ln a}{2} \cdot a^{-\frac{x}{2}}$$

Η (1) παύεται $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(x) \leq h(2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αρα για την h έχουμε ότι:

- παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 2$
- $x_0 = 2$ είναι το supremum του $\mathbb{R}$ και
- h παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

Επομένως από Θεώρημα Fermat, θα ισχύει ότι

$$h'(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) - \frac{h(a)}{2} \cdot a^{-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$h(a) - 4 + \frac{h(a)}{2} \cdot a^{-1} - \frac{h(a)}{2} \cdot a^{-1} = 0 \Leftrightarrow h(a) = 4 \Leftrightarrow \boxed{a = e^4}$$

Αρα για $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 2x + 2e^{-2x}$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 2x + 2e^{-2x} \Leftrightarrow$
 $F'(x) = (4x - x^2 - e^{-2x})'$

Από Συνθήκες Θεωρήματος Μέγιστου Τύπου υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $F(x) = 4x - x^2 - e^{-2x} + c$, για $x \in \mathbb{R}$

Για $x = 2$, $F(2) = 8 - 4 - e^{-4} + c \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{e^4} = 4 - \frac{1}{e^4} + c \Leftrightarrow \boxed{c = 0}$

Αρα $\boxed{F(x) = 4x - x^2 - e^{-2x}, x \in \mathbb{R}}$

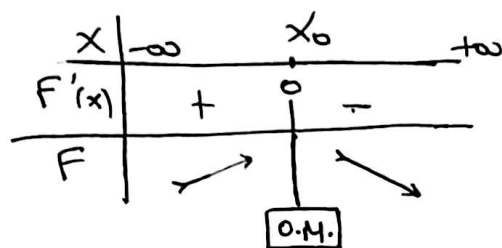
Δ2. Για $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 4 - 2x + 2e^{-2x}$.

Η F' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F''(x) = -2 - 4e^{-2x} < 0$
 άρα η F είναι κοίτη στο $\mathbb{R}$ και η F' γρήγορα φθίνει στο $\mathbb{R}$.

- F' συνεχής στο $[2, 3]$
- $F'(2) = 2e^{-4} > 0$
- $F'(3) = -2 + 2e^{-6} = -2(1 - e^{-6}) < 0$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$
 τέτοιο ώστε $F'(x_0) = 0$ και αφού $F' \downarrow$ στο $\mathbb{R}$, θα είναι
 και μοναδικό.

- Για $x < x_0 \xLeftrightarrow{F' \downarrow} F'(x) > F'(x_0) = 0$
 Για $x > x_0 \xLeftrightarrow{F' \downarrow} F'(x) < F'(x_0) = 0$



Επομένως, η F είναι γινόμενα αυξανόσα στο $(-\infty, x_0]$, γινόμενα φθίνουσα στο $[x_0, +\infty)$ και επομένως η ολική μέγιστη στο x_0 , το $F(x_0)$.

Δ3. Στο ομοτετακτωμένο $I = \int_0^p f'(F(x)) \cdot f(x) \cdot f(x) dx$

Θέτω $u = F(x)$ οπότε $du = F'(x) dx \Leftrightarrow du = f(x) dx$

• $x=0 \Leftrightarrow u = F(0) = -1$

• $x=p \Leftrightarrow u = F(p) = 0$, διότι p πηλίκο της F .

Άρα έχουμε, $I = \int_{-1}^0 f'(u) u du = [u f(u)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 f(u) du$
 $= 0 + f(-1) - [F(u)]_{-1}^0 = f(-1) - (F(0) - F(-1))$

οπότε $I = f(-1) + F(-1) - F(0)$.

Δ4. Για να βρω τα σημεία τομής της g με τον x -άξονα την εξίσωση $g(x) = 0$, για $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x f(x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } f(x)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } F'(x)=0$

$\xLeftrightarrow{\Delta 2} x=0 \text{ ή } x=x_0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο συνεχών, το εμβαδόν του χωρίου που περιγράφεται από την g και τον άξονα x είναι: $E = \int_0^{x_0} |g(x)| dx$.

$$g(x) = 2x f(x) = 2x F'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(10)

x	$-\infty$	0	x_0	$+\infty$
$2x$		$-$	$+$	$+$
$F'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-$	$+$	0	$-$

Αρα $g(x) \geq 0$ στο $[0, x_0]$, και
 g συνεχής στο $[0, x_0]$, ως γινόμενο
 συνεχών, (συνέπεια).

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{x_0} |g(x)| dx = \int_0^{x_0} g(x) dx = \int_0^{x_0} 2x F'(x) dx = [2x F(x)]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} 2 F(x) dx \\ &= 2x_0 F(x_0) - \int_0^{x_0} 2(4x - x^2 - e^{-2x}) dx = 2x_0 F(x_0) - 2 \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^{x_0} \\ &= 2x_0 F(x_0) - 2 \left(2x_0^2 - \frac{x_0^3}{3} + \frac{e^{-2x_0}}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2x_0 (4x_0 - x_0^2 - e^{-2x_0}) - 4x_0^2 + \frac{2x_0^3}{3} - e^{-2x_0} + 1 \\ &= 8x_0^2 - 2x_0^3 - 2x_0 e^{-2x_0} - 4x_0^2 + \frac{2x_0^3}{3} - e^{-2x_0} + 1 \\ &= 4x_0^2 - \frac{4x_0^3}{3} - e^{-2x_0} (2x_0 + 1) + 1. \end{aligned}$$

Οπότε $F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x_0 + 2e^{-2x_0} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x_0} = x_0 - 2$

Αρα $E = 4x_0^2 - \frac{4x_0^3}{3} + (2 - x_0)(2x_0 + 1) + 1$

$$= 4x_0^2 - \frac{4x_0^3}{3} + 4x_0 + 2 - 2x_0^2 - x_0 + 1$$

Επομένως $E = -\frac{4x_0^3}{3} + 2x_0^2 + 3x_0 + 3$.

β) Έστω $E(x) = -\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + 3x + 3, \quad x \in [2, 3]$

$E'(x) = -4x^2 + 4x + 3 < 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$, διότι:

x	$-\infty$	$-1/2$	$3/2$	$+\infty$
$-4x^2 + 4x + 3$		$-$	$+$	$-$

Αρα $E \downarrow$ στο $[2, 3]$.

Επομένως έχουμε:

$$x > 2 \Leftrightarrow E \downarrow \Rightarrow E(x) < E(2) \Leftrightarrow E < \frac{19}{3}.$$