ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Α/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ
Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΙΚΟΣ ΣΥΜΒΟΥΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΜΕ ΕΔΡΑ ΤΗ ΛΑΜΙΑ ΚΑΙ
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ ΑΡΜΟΔΙΟΤΗΤΑΣ ΤΙΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ
ΜΕΤΑΘΕΣΗΣ: ΦΘΙΩΤΙΔΑΣ ΚΑΙ ΕΥΡΥΤΑΝΙΑΣ

Ταχ. Δ/νση: Κύπρου 85, 35100 Λαμία
Πληροφορίες: Δημ. Σπαθάρας
Τηλ. και Fax: 22310-28816
E-mail: grssfth@dide.fth.sch.gr
Ιστοσελίδα: www.pe03.gr

Λαμία, 16 Ιανουαρίου 2018
Αριθ. Πρωτ.: 575

Προς:

Τους καθηγητές Μαθηματικών των ΓΕΛ Φθιώτιδας και Ευρυτανίας.

Κοιν.:

Περιφερειακή Διεύθυνση Π/θμιας και Δ/θμιας Εκπ/σης Στερεάς Ελλάδας.

Τμήμα Επιστημονικής και Παιδαγωγικής Καθοδήγησης.

ΘΕΜΑ: «Επισημάνσεις που αφορούν τη διδασκαλία των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ' τάξης Ημερήσιου και της Δ' τάξης Εσπερινού ΓΕΛ κατά το σχ. έτος 2017-2018»

Σχετ.: Εγκύκλιος με αρ. πρωτ.: 163573/Δ2/02-10-2017

Αγαπητοί συνάδελφοι

Η διδακτέα-εξεταστέα ύλη των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ' τάξης Ημερήσιου και της Δ' τάξης Εσπερινού ΓΕΛ κατά το σχ. έτος 2017-2018, διδάσκεται σύμφωνα με τις οδηγίες της εγκυκλίου με αρ. πρωτ.: 163573/Δ2/02-10-2017. Μετά από μελέτη της παραπάνω εγκυκλίου, κρίνουμε σκόπιμο να επισημάνουμε κάποια σημεία που αφορούν τη διδασκαλία μας σε σχέση με το παρελθόν. Κυρίως είναι εφαρμογές ή προτάσεις, που δεν περιέχονται στο σχολικό βιβλίο, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν, αναπόδεικτα, για τη λύση ασκήσεων. Τις επισημάνσεις μας αυτές αλλά και το σύνολο των οδηγιών επιβάλλεται να τις λάβετε υπόψη κατά τη διδασκαλία σας.

1) Κατά τη διδασκαλία της παραγράφου 1.2

Να τονιστεί ότι είναι δυνατόν το γινόμενο δύο συναρτήσεων να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με τη συνάρτηση μηδέν. Ένα κατάλληλο παράδειγμα αποτελούν οι συναρτήσεις f με $f(x)=x+|x|$, $x\in\mathbb{R}$ και g με $g(x)=x-|x|$, $x\in\mathbb{R}$

Πράγματι:

Υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε: $f(x)\neq 0$, π.χ. $f(1)=2$

Επίσης υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε: $g(x)\neq 0$, π.χ. $g(-2)=-4$

Όμως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left(x+|x|\right)\left(x-|x|\right)=x^2-|x|^2=x^2-x^2=0$

Συνιστάται να γίνουν και οι γραφικές παραστάσεις.

2) Κατά τη διδασκαλία της παραγράφου 1.3

Να τονιστεί στους μαθητές ότι για την επίλυση ασκήσεων μπορούν να χρησιμοποιούνται, αναπόδεικτα, οι προτάσεις:

1) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$

2) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$

Για διδακτικούς λόγους καλό είναι να παρουσιαστεί στην τάξη η απόδειξη των προτάσεων.

Απόδειξη:

1) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$, για τα οποία ισχύει η υπόθεση και δεν ισχύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής. Τότε θα ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ και $x_1 \geq x_2$.
   - Αν ήταν $x_1 > x_2$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ίσχυε $f(x_1) > f(x_2)$ που αντίκειται στην υπόθεση.
   - Αν ήταν $x_1 = x_2$, από τον ορισμό της συνάρτησης, θα ίσχυε $f(x_1) = f(x_2)$ που αντίκειται στην υπόθεση.

   Επομένως ισχύει το ζητούμενο.

2) Αποδεικνύεται όμοια.

Τελικά:

- Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta$$

- Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta$$

3) Κατά τη διδασκαλία της παραγράφου 1.7

Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις οι οποίες δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο:

Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1) Αν ισχύουν:

   α) $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

   β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$,

   τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

2) Αν ισχύουν:

   α) $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

   β) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$,

   τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Η παρουσίαση των παραπάνω προτάσεων μπορεί να γίνει διαισθητικά με τη βοήθεια κατάλληλων γραφικών παραστάσεων. Παρόλα αυτά παρουσιάζουμε και μια απόδειξη η οποία μπορεί να διδαχθεί κατά την κρίση του διδάσκοντος.

Απόδειξη:

1) Έστω $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, είναι $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. Επομένως:

$$0 \le f(x) \le g(x) \Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{g(x)} \le \frac{1}{f(x)} \text{ κοντά στο } x_0$$

Όμως $\lim\limits_{x \to x_0} 0 = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$$

Τελικά επειδή $g(x) > 0$ κοντά στο x_0 έχουμε $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

2) Αποδεικνύεται όμοια.

4) Κατά τη διδασκαλία της παραγράφου 1.8

Διευκρινίζεται ότι στο θεώρημα της σελίδας 78 του σχολικού βιβλίου, που αφορά το σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα, τα α, β μπορεί να είναι και μη πεπερασμένα.

5) Κατά τη διδασκαλία της παραγράφου 2.7

Μετά την εφαρμογή 2 στη σελίδα 148 του σχολικού βιβλίου να διδαχθεί ως εφαρμογή η άσκηση 3 α) i) Β΄ Ομάδας σελίδα 152. Ως απόδειξη, εκτός από εκείνη που περιέχεται στο βιβλίο λύσεων, προτείνεται να δοθεί η ακόλουθη που είναι έμμεση συνέπεια της εφαρμογής 2.

Ζητούμενο:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x \ge x + 1$ και το ίσον ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

Απόδειξη:

Για όλους τους θετικούς αριθμούς x είναι $\ln x \le x - 1$ και το ίσον ισχύει μόνο όταν $x = 1$. Επομένως και για τον θετικό e^x έχουμε:

$$\begin{aligned} \ln e^x \le e^x - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x \le e^x - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad e^x \ge x + 1 \end{aligned}$$

Η ισότητα αληθεύει μόνο όταν $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

6) Κατά τη διδασκαλία της παραγράφου 3.4

Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις αφού παρουσιαστούν σύντομα οι, προφανείς, αποδείξεις τους:

Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$.

1) Αν $f(x) \ge g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge \int_\alpha^\beta g(x)dx$

2) Αν, επιπλέον, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha, \beta]$, δηλαδή, αν υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ με $f(\xi) \ne g(\xi)$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$

Απόδειξη

1) Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\ge 0$. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\big(f(x)-g(x)\big)dx\ge 0 \ &\Leftrightarrow\ \int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx\ge 0\\ &\Leftrightarrow\ \int_\alpha^\beta f(x)dx\ge\int_\alpha^\beta g(x)dx\end{aligned}$$

2) Αν, επιπλέον, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha,\beta]$, τότε η συνάρτηση $f(x)-g(x)$ δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\big(f(x)-g(x)\big)dx> 0 \ &\Leftrightarrow\ \int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx> 0\\ &\Leftrightarrow\ \int_\alpha^\beta f(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx\end{aligned}$$

Τυπογραφική διόρθωση:

Στην ισότητα του πρώτου πλαισίου, στη σελίδα 212 του σχολικού βιβλίου, τα άκρα ολοκλήρωσης να αντιστραφούν.

Για τις οδηγίες διδασκαλίας του ΥΠ.Π.Ε.Θ. πατήστε εδώ: http://www.pe03.gr/odigies-didaskalias

Με εκτίμηση
Ο Σχολικός Σύμβουλος των Μαθηματικών

Δημήτριος Σπαθάρας
www.pe03.gr